第 15 章

線形代数

行列の定義

$m \times n$ **の行列**（または m **行** n **列の行列**）は，m 個の行と n 個の列から成る四角形の形をした数値配列である．この配列は以下の形でかける．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{5} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

行列上の各数値 a_{jk} を**要素**と言う．下付きの添字 j と k はそれぞれ要素が現れる行と列を示す．

行列を表すときは，式 (1) で使っている「A」などの文字や，代表的な要素を示す記号「(a_{jk})」を用いることとする．

一つの行だけから成る行列は**行ベクトル**と呼ばれ，一つの列のみから成る行列は**列ベクトル**と呼ばれる．また，行の数 m および列の数 n が等しいときはその行列は $n \times n$ **正方行列**（または単に n 次正方行列）と呼ばれる．ある行列を，その要素が実数または複素数かによって，**実行列**または**複素行列**と言う．

行列に関わる定義および操作

1. 行列の相等性： 同じ次数を持つ 2 つの行列 $A = (a_{jk})$ と $B = (b_{jk})$ を考える [つまり，お互い同じ数の行数と列数を持っているということ]．この 2 つの行列が**等しい**とは，$a_{jk} = b_{jk}$ である．

2. 行列の和： 同じ次数を持つ $A = (a_{jk})$ と $B = (b_{jk})$ を考える．このとき，A と B の**和**を $A + B = (a_{jk} + b_{jk})$ と定義する．

例 1.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，これらの和は以下となる．

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & 1-5 & 4+1 \\ -3+2 & 0+1 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

和に関して交換法則と結合法則が成り立っていることに注目しよう．すなわち，同じ次数を持つ任意の行列 A, B, C に対して以下が成り立つ．

$$\text{交換法則: } A + B = B + A, \qquad \text{結合法則: } A + (B + C) = (A + B) + C \tag{2}$$

3. 行列の差： 同じ次数を持つ $A = (a_{jk})$ と $B = (b_{jk})$ を考える．このとき A と B の**差**は $A - B = (a_{jk} - b_{jk})$ として定義する．

例 2.

例 1 の行列 A と B を用いる．これらの行列の差は以下となる．

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-3 & 1+5 & 4-1 \\ -3-2 & 0-1 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. 行列のスカラー倍： $A = (a_{jk})$ と任意の数 (**スカラー**) である λ を考える．λ と A の**積**を，$\lambda A = A\lambda = (\lambda a_{jk})$ として定義する．

例 3.

例 1 の行列 A を用い，$\lambda = 4$ とする．これらの積は以下となる．

$$\lambda A = 4 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 16 \\ -12 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. 行列の積： $A = (a_{jk})$ を $m \times n$ 行列とし，$B = (b_{jk})$ を $n \times p$ 行列とする．このとき，A と B の**積** AB を，行列 $C = (c_{jk})$ として

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} b_{lk} \tag{3}$$

と定義する．ここで C は $m \times p$ 行列である．

上の定義より行列積は，A の列数と B の行数が同じである場合のみ定義されることに注意しよう．この条件を満たす 2 つの行列は「**整合** (conformable) である」という．

例 4.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ と $D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．これらの行列積は以下となる．

$$\begin{aligned} AD &= \begin{pmatrix} (2)(3)+(1)(2)+(4)(4) & (2)(5)+(1)(-1)+(4)(2) \\ (-3)(3)+(0)(2)+(2)(4) & (-3)(5)+(0)(-1)+(2)(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 & 17 \\ -1 & -11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

一般的には $AB \neq BA$ であることに注意．つまり，行列の積に対しては交換法則が一般的に成り立たないのである．一方で結合法則と分配法則は成り立つ．すなわち以下は成り立つ．

$$\begin{aligned} &\text{結合法則: } A(BC) = (AB)C, \\ &\text{分配法則: } A(B+C) = AB + AC, \quad (B+C)A = BA + CA \end{aligned} \tag{4}$$

行列 A は，正方行列である場合にのみ，自身との積を作ることができる．このとき積 AA は A^2 と書ける．このような具合で正方行列のべき乗を定義すると，$A^3 = AA^2$, $A^4 = AA^3$ などのようになる．

6. 行列の転置： 行列 A の列と行を入れ替えたとき，得られる行列は A の**転置**と呼ばれ A^T と表す．つまり $A = (a_{jk})$ のときの転置は $A^T = (a_{kj})$ となる．

例 5.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の転置は $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. となる．

転置に関して，以下が成り立つことが証明できる．

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \quad (AB)^T = B^T A^T, \quad (A^T)^T = A \tag{5}$$

7. 対称行列と歪対称行列： ある正方行列が**対称**なら $A^T = A$，**歪対称**なら $A^T = -A$ が成り立つ．

例 6.

行列 $E = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ は対称行列であり，$F = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ は歪対称行列である．

任意の実正方行列 [実数成分のみで構成される正方行列] は常に，実対称行列と実歪対称行列の和として表せる．

8. 行列の複素共役： 行列上の全ての要素 a_{jk} を複素共役 $\bar{a}_{jk}$ に置き換えたとき，この行列は A の**複素共役**であると呼ばれ，$\bar{A}$ と表す．

9. エルミート行列および歪エルミート行列： ある正方行列 A が，その行列自身の転置の複素共役と等しいとき，すなわち $A = \bar{A}^T$ となるとき，A は**エルミート行列**と呼ばれる．一方で，$A = -\bar{A}^T$ となる場合，A は**歪エルミート行列**と呼ばれる．A の要素が実数値である場合，上述の性質はそれぞれ，対称行列および歪対称行列が満たす性質に帰着する．

10. 行列の主対角線とトレース： $A = (a_{jk})$ が正方行列であるとき，$j = k$ となる全要素 a_{jk} を含む対角線は**主対角線**と呼ばれる．また，その主対角線上の要素の和を A の**トレース**と呼ぶ．

例 7.

行列の主対角線は以下に示した部分である．そのトレースは $5 + 1 + 2 = 8$ となる．

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$j \neq k$ の要素がすべて $a_{jk} = 0$ のとき，その行列は**対角行列**という．

11. 単位行列： 主対角線上の全要素が 1 で，他の全要素がゼロである正方行列は，**単位行列**と呼ばれ，I と表される．以下は I の重要な性質である．

$$AI = IA = A, \qquad I^n = I \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{6}$$

行列代数における単位行列は，通常用いている代数における数値 1 と同じ役割を果たしていることがわかる．

12. ゼロ行列： 全要素がゼロとなる行列を**ゼロ行列**といい，たいていは O，または単に $\mathbf{0}$ と表される．$\mathbf{0}$ と同じ次数を持つ任意の行列 A に関して，

$$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A \tag{7}$$

が成り立つ．また，A と $\mathbf{0}$ が正方行列の場合は，

$$A\mathbf{0} = \mathbf{0}A = \mathbf{0}. \tag{8}$$

行列代数におけるゼロ行列は，通常用いている代数における数値 0 と同じ役割を果たしていることがわかる．

行列式

(1) の行列 A を正方行列とするとき，A に対して，

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9}$$

で示される数，すなわち A の n 次**行列式**（$\det(A)$ と表記）を関連付ける．この行列式の値を定義するためには，以下で述べる概念を導入する必要がある．

1. 小行列式： Δ の要素 a_{jk} が任意に与えられている．このとき，「a_{jk} の**小行列式**」という，j 番目の行および k 番目の列上の全ての要素を取り除くことで新たに得られる $(n-1)$ 次行列式と関連付ける．

例 8.

以下の式の左側に示した 4 次行列式の，第 2 行 3 列上の「要素 5 の小行列式」は，以下で示した要素を取り除くことで得られる．

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. 余因子： a_{jk} の小行列式に $(-1)^{j+k}$ を掛けたものを,「a_{jk} の**余因子**」といい, A_{jk} と記す.

例 9.

例 8 で与えた 4 次行列式を用いる. この行列式の「要素 5 の余因子」は, その小行列式の $(-1)^{2+3}$ 倍, つまり以下となる.

$$-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

以上の概念を使って行列式の値を定義する. 行列式の値は, 任意に選んだ行上 [または列上] の要素と, それらの要素に対応する余因子との間の積和として定義される. この積和による表示を**余因子展開**といい, 具体的には次のようになる.

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk}, \quad (A_{jk} = a_{jk} \text{の余因子}). \tag{10}$$

この値は, 行 [または列] の選び方に関係なく一意に定まることを示せる $\boxed{\text{問題 15.7}}$.

行列式に関する諸定理

定理 15.1 行と列を入れ替えても行列式の値は変化しない. $\det(A) = \det(A^T)$.

定理 15.2 ある一行上 [または一列上] の要素がただ一つを除いて全てゼロであるとする. このとき, 行列式の値は, その「ゼロでない要素の値」と「ゼロでない要素の余因子」との積に等しい. このことから, ある一行 [または一列] の全要素がゼロの場合, その行 [または列] を持つ行列式はゼロとなる.

定理 15.3 ある二行 [または二列] を入れ替えると, 行列式の符号が変わる.

定理 15.4 ある一行上 [または一列上] の全要素がある数で掛けられると, 行列式もこの数で掛けられる.

定理 15.5 任意の二行 [または二列] が同一かあるいは比例関係にあるとき, その行列式はゼロとなる.

定理 15.6 ある行 [または列] の要素を二つの項の和で表した, その行列式は, それぞれの項を成分に持った, 同じ次数の二つの行列式の和で表せる.

定理 15.7 任意の行 [または列] の定数倍を他の任意の行 [または列] に足しても, 行列式の値は変わらない.

定理 15.8 A と B が同じ次数の正方行列であるとき，

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{11}$$

定理 15.9「ある行上 [または列上] の要素」と「それら要素が位置する行とは別の行上 [または別の列上] の各要素に対応する余因子」との積和はゼロになる．具体的に記すと次のようになる．

$$\sum_{k=1}^{n} a_{qk}A_{pk} = 0 \qquad \text{または,} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{kq}A_{kp} = 0 \quad (p \neq q) \tag{12}$$

もし $p = q$ であるなら，この積和は (10) より $\det(A)$ となる．

定理 15.10 $v_1, v_2, \dots, v_n$ をある n 次正方行列 A の行ベクトル [または列ベクトル] とする．このとき，条件

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = O \qquad (O\ \text{はゼロ行列}) \tag{13}$$

を満たす，ゼロでない定数 [スカラー] $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ が存在することと，$\det(A) = 0$ であることは同値である．なお，条件 (13) を満たすベクトル $v_1, v_2, \dots, v_n$ は**線形従属**であるといい，そうでない場合は**線形独立**であるという．$\det(A) = 0$ となる行列 A は**非正則行列** (**特異行列**) と呼ばれ，$\det(A) \neq 0$ となる行列 A は**正則行列** (**非特異行列**) と呼ばれる．

実際に n 次行列式を求めるためには，定理 15.7 により，一行上 [または一列上] の要素を一つを除いて全てゼロとし，次に定理 15.2 を用いて新しい $n-1$ 次行列式を得る．この方法を続けていくことで，最終的に（容易に計算できる）2 次や 3 次の行列式に到達する．

逆行列

与えられた行列 A に対して $AB = I$ を満たす行列 B が存在した場合，この B は A の**逆行列**と呼ばれ，A^{-1} で表される．次の定理が基本となる．

定理 15.11 A が n 次正則行列であるとき [即ち $\det(A) \neq 0$ となる行列を指す]，$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ を満たす一意な逆行列 A^{-1} が存在する．A^{-1} は以下のように与えられる．

$$A^{-1} = \frac{(A_{jk})^T}{\det(A)} \tag{14}$$

ここで，(A_{jk}) は余因子 A_{jk} から成る行列で $(A_{jk})^T = (A_{kj})$ はその転置行列を表している．

逆行列の性質を以下に示した：

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad (A^{-1})^{-1} = A \tag{15}$$

直交行列およびユニタリ行列

実行列 A が与えられ，その転置が A の逆行列と同じになる場合，A は**直交行列**であると呼ばれる．すなわち $A^T = A^{-1}$ または $A^TA = I$ が成り立つ．

複素行列 A が与えられ，その共役転置が A の逆行列と同じになる場合，A は**ユニタリ行列**であると呼ばれる．すなわち $\bar{A}^T = A^{-1}$ または $\bar{A}^TA = I$ が成り立つ．実ユニタリ行列は直交行列であることに注意しよう．

直交ベクトル

第 5 章で，「二つのベクトル $a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ と $b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$ の内積は $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ であり，特に $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = 0$ となる場合，それらのベクトルは直交している」ことを学んだ．行列の観点からは．これらのベクトルは列ベクトル

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

とみなすことができ，したがって内積は $A^TB = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ と与えられることがわかる．このことから，**実列ベクトル A と B の内積**を A^TB と定義し，$A^TB = 0$ の場合に A と B が**直交している**といえる．

以上を，ベクトルが複素数成分を持つケースに一般化すると便利なので，次の定義を採用する．

定義 1. $\bar{A}^TB$ を A と B の**内積**といい，二つの列ベクトル A と B は $\bar{A}^TB = 0$ となるとき**直交している**という．

U がユニタリ行列の場合，$\bar{U}^TU = I$ が成り立つことから，U の各列ベクトル A は，それ自身との内積が 1 になることがわかる．これはすなわち，A は**単位ベクトル**でその長さ

が 1 となることを意味している．したがって，ユニタリ行列の各列ベクトルは単位ベクトルである．このことを踏まえて，以下の定義を与える．

定義 2. ベクトル集合 $X_1, X_2, \ldots$ が

$$\bar{X}_j^T X_k = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

を満たすとき，**ベクトルのユニタリ集合**または**ユニタリ系**と呼ばれる．実ベクトルである場合は，**単位ベクトルの正規直交系**または**直交集合**と呼ばれる．

線形方程式系

方程式の組は

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 \;+\; a_{12}x_2 \;+\cdots+\; a_{1n}x_n \;=\; r_1 \\ a_{21}x_1 \;+\; a_{22}x_2 \;+\cdots+\; a_{2n}x_n \;=\; r_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = r_m \end{array}\right\} \tag{16}$$

という形を持ち，これを n **個の未知変数** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **に関する** m **本の線形方程式系**と呼ぶ．また，$r_1, r_2, \ldots, r_n$ がすべてゼロの場合，この系は**同次**であると言い，すべてゼロでない場合は**非同次**であると言う．(16) を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の組はその系の**解**と呼ばれる．

行列形式では，(16) は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} \tag{17}$$

もしくはより簡潔に

$$AX = R \tag{18}$$

と書ける（A, X, R は (17) 中の行列を表している）．

n 個の未知変数に関する n 個の方程式系とクラメルの規則

A を，$m = n$ でかつ A^{-1} が存在する正則行列であるとする．このとき (17) または (18) を

$$X = A^{-1}R \tag{19}$$

と書いて解くことができ，その系は一意の解を有する．

またもう一つの方法として，未知変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \tag{20}$$

と表すこともできる．ここで，$\Delta = \det(A)$ は**系の行列式**と呼ばれ (9) で与えられる．一方 $\Delta_k(k = 1, 2, \dots, n)$ は，Δ の k 番目の列を列ベクトル R に置き換えた行列の行列式である．(20) に示したこの規則は**クラメルの規則**と呼ばれる．

この規則の下，以下の 4 つの場合が生じ得る．

Case 1，（$\Delta \neq 0$, $R \neq 0$）：この場合，すべての x_k がゼロでない一意解が存在する．

Case 2，（$\Delta \neq 0$, $R = 0$）：この場合，唯一の解は $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots, x_n = 0$，すなわち $X = 0$．この解は**自明な解**と呼ばれる．

Case 3，（$\Delta = 0$, $R = 0$）：この場合，自明な解以外にも無限に多くの解が存在する．これは少なくとも方程式系のうちの一つが他のいずれかの方程式から得られることを意味する．すなわち，この方程式系は線形従属である．

Case 4，（$\Delta = 0$, $R \neq 0$）：この場合，(20) の行列式 Δ_k が全てゼロである場合に限り，無限に多くの解が存在する．そうでなければ，解は存在しない．

$m \neq n$ の場合は問題 15.93(補)〜問題 15.96(補)で考える．

固有値と固有ベクトル

$A = (a_{jk})$ が $n \times n$ 行列で X を列ベクトルとしよう．λ をある値とした方程式

$$AX = \lambda X \tag{21}$$

は,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{22}$$

または

$$\left.\begin{array}{rcccl} (a_{11}-\lambda)x_1 + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & + (a_{22}-\lambda)x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + \quad a_{n2}x_2 & + \cdots + & (a_{nn}-\lambda)x_n & = 0 \end{array}\right\} \tag{23}$$

として書くことができる．式 (23) が自明でない解を持つためには

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{24}$$

である必要がある．この行列式は λ に関する n 次の多項式である．この多項式の解は行列 A の**固有値** (または**特性値**) と呼ばれる．各固有値に対応して，解 $X \neq \mathbf{0}$，すなわち固有値に属する**固有ベクトル** (または**特性ベクトル**) と呼ばれる非自明な解が存在する．方程式 (24) は

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{25}$$

とすることもでき，λ に関する方程式は**特性方程式**と呼ばれる．

固有値と固有ベクトルに関する定理

定理 15.12 エルミート行列 [または実対称行列] の固有値は実数である．歪エルミート行列 [または実歪対称行列] の固有値はゼロまたは純虚数である．ユニタリ行列 [または実直交行列] の固有値の絶対値はすべて 1 に等しい．

定理 15.13 エルミート行列 [または実対称行列] の異なる固有値に属している固有ベクトル同士は互いに直交している．

定理 15.14 [ケーリーハミルトンの定理] 行列はそれ自身，特性方程式を満たす 問題 15.40.

定理 15.15 [行列の対角化] 正則行列 A が，互いに異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...$ を持ち，それらに対応する各固有ベクトルを列として持った行列を

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & ... \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & ... \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}$$

と記述したとき，これらの行列を使って以下のように表すことができる．

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \lambda_3 & ... \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \end{pmatrix}.$$

つまり，B による A の**変換**と呼ばれる $B^{-1}AB$ は，主対角線上に A の固有値を含みその他をゼロとした対角行列である．このとき A は**対角化された**という 問題 15.41．

定理 15.16 [二次形式の標準形] 例えば A を対称実行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (a_{12} = a_{21},\ a_{13} = a_{31},\ a_{23} = a_{32})$$

としよう．$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ のとき，以下の**二次形式**を得る．

$$X^T AX = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

この二次形式の交差項は，U を要素 u_1, u_2, u_3 を持つ列ベクトル，B を A を対角化する直交行列としたとき，$X = BU$ とおくことで取り除くことができる．この交差項を持たない u_1, u_2, u_3 に対する新たな二次形式は**標準形**とよばれる 問題 15.43．以上のことは「エルミート二次形式」として一般化することができる 問題 15.114(補)．

行列の演算子解釈

A が $n \times n$ 行列のとき，その行列自身を，ある列ベクトル X に作用し別の列ベクトル AX を生成するような**演算子**または**変換**として考えることができる．この解釈により式

(21) は，A によってそれ自身の定数倍に変換されるベクトル X を求めることになる [言い換えれば，方向は同じだが大きさが異なるベクトルを求めることになる].

A が直交行列の場合，この行列による変換は**回転**となる．通常のベクトルの回転ではその大きさは変わらないので，全ての固有値の絶対値が 1 に等しいことは，このような場合の理由を説明している [定理 15.12].

この「変換」に関する考えは，行列に関連する多くの性質に対して解釈を与えることになるため非常に便利である．