演習問題

行列演算

問題 15.1　行列が

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

と与えられたとき，以下を求めよ．

(a) $A+B$,　(b) $A-B$,　(c) $2A-3C$,　(d) $3A+2B-4C$,　(e) AB,

(f) BA,　(g) $(AB)C$,　(h) $A(BC)$,　(i) A^T+B^T,　(j) B^TA^T

解答

(a) $A+B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & -1\end{pmatrix}$

(b) $A-B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 7\end{pmatrix}$

(c) $2A-3C=2\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 8 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -12\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -14\\ 14 & 9\end{pmatrix}$

(d) $3A+2B-4C=3\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 12 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 4 & -8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & -16\\ 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -17\\ 24 & 5\end{pmatrix}$$

(e) $AB = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(2)(-1)+(-1)(2) & (2)(1)+(-1)(-4)\\ (4)(-1)+(3)(2) & (4)(1)+(3)(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 6\\ 2 & -8\end{pmatrix}$

(f) $BA = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)(2)+(1)(4) & (-1)(-1)+(1)(3)\\ (2)(2)+(-4)(4) & (2)(-1)+(-4)(3)\end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -12 & -14 \end{pmatrix}$$

(e) と (f) の結果から $AB \neq BA$ である．これは「(行列の）積に関する交換法則は一般に成り立たない」という事実を説明する例となっている．

(g) $(AB)C = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -22 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}$

(h) $A(BC) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -22 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}$

(g) と (h) から $(AB)C = A(BC)$ である．これは「(行列の）積に関する結合法則が成り立っている」という事実を説明する例となっている．

(i) $A^T + B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(a) と (i) から $A^T + B^T = (A+B)^T$ である．

(j) $B^T A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$

(e) と (j) から $B^T A^T = (AB)^T$ である．

問題 15.2　行列が

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

と与えられたとき，以下を示せ．

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

解答

まず,

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

より,

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (3)(3)+(0)(-1)+(1)(0) & (3)(0)+(0)(-1)+(1)(0) & (3)(1)+(0)(6)+(1)(3) \\ (-1)(3)+(-1)(-1)+(6)(0) & (-1)(0)+(-1)(-1)+(6)(0) & (-1)(1)+(-1)(6)+(6)(3) \\ (0)(3)+(0)(-1)+(3)(0) & (0)(0)+(0)(-1)+(3)(0) & (0)(1)+(0)(6)+(3)(3) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

一方,

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -6 & 8 & -1 \\ -7 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 11 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ -9 & -1 & 11 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

であることから，

$$A^2+AB+BA+B^2=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}=(A+B)^2.$$

問題 15.3　任意の実正方行列は，「実対称行列と実歪対称行列の和」として常に表せることを証明せよ．

解答

A を実正方行列とすると，

$$A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$$

と表せる．ここで，$(A+A^T)^T=A^T+A=A+A^T$ となることから，$\frac{1}{2}(A+A^T)$ は対称行列である．また，$(A-A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$ となることから $\frac{1}{2}(A-A^T)$ は歪対称行列である．したがって，題意は示された．

問題 15.4　行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ がエルミート行列であることを示せ．

解答

$A^T=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ とし，それから $\overline{A^T}=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}=A$ となる．ゆえに，A はエルミート行列である．

問題 15.5　n 次単位行列 I は任意の n 次正方行列 A と可換であり，その積は A となることを証明せよ．

解答

$n=3$ についての証明を与える．この場合は

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

となり，このとき

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A$$

$$AI = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A$$

が成り立つ．すなわち，$IA = AI = A$ となる．

$n > 3$ に関する拡張は容易に行える．

行列式

問題 15.6　p.6 で与えた行列式の定義（余因子展開）を用いて (a) 2 次，(b) 3 次の行列式を求めよ．

解答

(a) 行列式を $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ とし，展開には第 1 行の成分を用いるとする．対応する余因子は

$$A_{11} = (-1)^{1+1} a_{22} = a_{22}, \qquad A_{12} = (-1)^{2+1} a_{21} = -a_{21}$$

であるから，余因子展開により行列式は次のような値となる．

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

上の計算では第 1 行を用いたが，第 2 行（または第 1 列，第 2 列）の成分を使った余因子展開でも同じ値が得られる．

(b) 行列式を $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ とすると，第 1 行における余因子の成分は

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

である．このとき，行列式の値は次のような値となる．

$$\begin{aligned} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ &\quad + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) \\ &\quad\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

上の計算では第 1 行を用いたが，第 2 行もしくは第 3 行（または第 1 列や第 2 列，第 3 列）の成分を使った余因子展開でも同じ値が得られる．

問題 15.7　余因子展開を行う際，どの行（または列）を用いたかに関係なく行列式の値が同一であることを証明せよ．

解答

n 次行列式 $\varDelta = (a_{jk})$ を考える．$n = 2$ に対しては，問題 15.6 の結果から題意は成り立つことがわかる．ここで，帰納法による証明を行う．すなわち，題意が，$n - 1$ 次で成り立つと仮定した上で，n 次に対しても成り立つことを証明する．証明の方針は，「2 つの異なる p 行と q 行による $\varDelta$ の余因子展開を，展開の順番を入れ替えて交互に行い，それらの展開結果が等しいことを示す」こととする．

まず，$\varDelta$ を p 番目の行の要素で余因子展開しよう．すると，典型的な余因子展開の項は

$$a_{pk}A_{pk} = a_{pk}(-1)^{p+k}M_{pk} \tag{1}$$

となる．M_{pk} は，a_{pk} 成分の余因子である A_{pk} の「小行列式」部分に対応している．この小行列式の次数は $n - 1$ であるため，($n - 1$ 次の行列式では題意が成り立つから)M_{pk} は任意行で余因子展開できることがわかる．

そこで $q > p$ と仮定して，(1) 式の小行列式 M_{pk} をさらに q 番目の行で余因子展開してみよう（以下の論証は $q < p$ の場合にも同様に成り立つ）．この q 番目の行は成分 a_{qr} $(r \neq k)$ から成り，M_{pk} の $(q - 1)$ 番目の行に対応している．

さらに $r < k$ のとき，a_{qr} は M_{pk} の r 番目の列に位置しているので，a_{qr} 成分による余因子展開を行うと，a_{qr} に対応する項は

$$a_{qr}(-1)^{(q-1)+r}M_{pkqr} \tag{2}$$

となる．式中の M_{pkqr} は，M_{pk} の a_{qr} 成分に関する小行列式に対応している．以上 (1) と (2) より，$\varDelta$ の余因子展開における典型的な項は

$$a_{pk}(-1)^{p+k}a_{qr}(-1)^{q-1+r}M_{pkqr} = a_{pk}a_{qr}(-1)^{p+k+q+r-1}M_{pkqr} \tag{3}$$

となることがわかる．一方で $r > k$ となる場合は，a_{qr} は M_{pk} の $(r-1)$ 番目の列に位置しているので，(3) の結果に負号を掛けたものが得られる．

最初に立ち返り，q 番目の行の成分で $\varDelta$ を余因子展開することを考える．この場合，典型的な項は

$$a_{qr}A_{qr} = a_{qr}(-1)^{q+r}M_{qr} \tag{4}$$

となる．そしてそこから $p > q$ となる p 番目の行上の成分で M_{qr} を展開する．前回と同様に，$k > r$ の場合，M_{qr} の余因子展開における典型的な項は

$$a_{pk}(-1)^{p+(k-1)}M_{pkqr} \tag{5}$$

となる．以上 (4) と (5) より，$\varDelta$ の余因子展開における典型的な項は

$$a_{qr}(-1)^{q+r}a_{pk}(-1)^{p+k-1}M_{pkqr} = a_{pk}a_{qr}(-1)^{p+k+q+r-1}M_{pkqr} \tag{6}$$

となり，これは (3) と一致することがわかる．一方で $k < r$ の場合は (6) の結果に負号を掛けたものになり，これは最初に行った余因子展開の $r > k$ の場合に一致する．以上より，必要な証明が完了した．

なお，列に関する余因子展開でも，行による展開と同じ結果が得られることが証明できる [定理 15.1(p.6)].

問題 15.8　以下の方法で行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(a) 第 1 行成分に沿った余因子展開

(b) 第 2 行成分に沿った余因子展開

解答

(a) 第 1 行上の成分を用いて余因子展開を行うと

$$(3)\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix}1 & -3\\ 4 & 2\end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix} = (3)(7) - (-2)(14) + (2)(-7) = 35$$

と求められる.

(b) 第 2 行上の成分を用いて余因子展開を行うと

$$-(1)\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{vmatrix} = -(1)(-6) + (2)(-2) - (-3)(11) = 35$$

と求められる.

問題 15.9　定理 15.4(p.6) を証明せよ

解答

行列式を

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

と表し，その k 番目の行上の成分に λ を掛けた行列式を

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

と与えよう．(1) と (2) を k 番目の行の成分で余因子展開すると，それぞれ

$$\varDelta \ = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} \tag{3}$$

$$\varDelta_1 = (\lambda a_{k1})A_{k1} + (\lambda a_{k2})A_{k2} + \cdots + (\lambda a_{kn})A_{kn} \tag{4}$$

と求められ，$\varDelta_1 = \lambda\varDelta$ が得られる．

問題 15.10　定理 15.5(p.6) を証明せよ．

解答

(a) 2 つの行が同じ成分を持つとき，特定の行を交換しても行列式の値は変わらない．しかし，定理 15.3(p.6) によると負号が変わらなければならない．すると，$\varDelta = -\varDelta$ より $\varDelta = 0$ を得る．
(b) 2 つの行が比例関係にある成分を持つときは，その比例定数で括るとそれらの成分を同じにすることができるので，その行列式は (a) によってゼロとならなければならない．

問題 15.11　定理 15.6(p.6) を証明せよ．

解答

行列式を

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と記述する．最初の行では，2 つの項の合計として表される成分が各々ある．このとき，余因子展開によって

$$\varDelta = (a_{11}+b_1)A_{11} + (a_{12}+b_2)A_{12} + \cdots + (a_{1n}+b_n)A_{1n} \tag{1}$$

を得る．A_{11}, $A_{12}, \ldots, A_{1n}$ は第 1 行目の成分に対応する余因子である．だが (1) は

$$\begin{aligned} \varDelta &= (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}) + (b_1A_{11} + \cdots + b_nA_{1n}) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

と表すことができ，題意が示される．なお，他の行（または列）が選択された場合であっても上と同様な手続きで証明できる．

問題 15.12　定理 15.7(p.6) を証明せよ．

解答

$\Delta = (a_{jk})$ の 2 行目の成分それぞれに λ を掛け，1 行目の成分に足す状況を考えよう（任意の行や列を選んでも同様な証明ができる）．このとき，行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & \cdots & a_{1n}+\lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と書ける．しかし，問題 15.11 よりこの式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

となる．2 項目の行列式についてその 1 行目と 2 行目が比例関係にあるからゼロである（定理 15.5）．ゆえに目的の結果が得られた．

問題 15.13　$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

解答

1 行目の成分に $-3, 2, 3$ を掛けたものを，それぞれ 2, 3, 4 行目の成分に足していくと，

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ -8 & 0 & 5 & -17 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \\ 2 & 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

となることがわかる．定理 15.7 より，この行列式の値は元の行列式の値と等しい．この新たに得られた行列式が 2 列目において三つのゼロ成分を持つことに注目しよう．そもそもこのようにしたことが，$-3, 2, 3$ の数字を選択した意図である．

この行列式の値は，第 2 列上の各々の成分にそれらの余因子を掛けて余因子展開することで

$$-\begin{vmatrix} -8 & 5 & -17 \\ 5 & -5 & 10 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} -8 & 5 & -17 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

となる．（右辺は）定理 15.4 を用いて，2 行目から係数 5 を外に出している．

さらに，第 2 行上の成分に 5 と -1 を掛け，それぞれ 1, 3 行目の成分に足していくと

$$-5\begin{vmatrix} -3 & 0 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

となり，2 列目上の成分で余因子展開することで，

$$(-5)(-1)\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -85.$$

問題 15.14 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ が与えられたとき，定理 15.8 を確かめよ．

解答

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ であることを定理は述べている．このとき，

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 0 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}$$

となるから，行列式の値は

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 0 \\ 15 & 14 \end{vmatrix}$$

すなわち，

$$(7)(34) = (17)(14)$$

と求まる．この式は正しく成り立つことから，定理が成り立つことが確認できた．

問題 15.15　$v_1 = (2\ -1\quad 3)$, $v_2 = (1\quad 2\ -1)$, $v_3 = (-3\quad 4\ -7)$ としたとき，
(a) v_1, v_2, v_3 が線形従属であることを示せ.
(b) 以下を示すことで定理 15.10(p.7) が成り立つことを確かめよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

解答

(a) $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \mathbf{0} = (0\ 0\ 0)$ において，すべてゼロとならない定数 λ_1, λ_2, λ_3 が存在することを示す必要がある．ここで，

$$\lambda_1(2\ -1\quad 3) + \lambda_2(1\quad 2\ -1) + \lambda_3(-3\quad 4\quad 7) = (0\quad 0\quad 0)$$

とおくと，

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

となる．例えば，$\lambda_3 = 1$ と仮定しよう．すると上式は $2\lambda_1 + \lambda_2 = 3,\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 4,\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = 7$ となる．これらの 2 つについて解くと，$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$ と求まる．したがって，ゼロとならない定数 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$ が存在することがわかった.
(b) 2 行目の成分に $-2, 3$ を掛け，これをそれぞれ 1, 3 行目に加えると，与えられた行列式は

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & -10 \end{vmatrix} = -(1)\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 10 & -10 \end{vmatrix} = 0.$$

問題 15.16　定理 15.9(p.7) を証明せよ.

解答

行列式

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

は，p 番目の行の成分に沿って余因子展開した場合，定義より，

$$\det(A) = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + \cdots + a_{pn}A_{pn} = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}A_{pk} \tag{1}$$

となる．ここで，A の p 行目の成分 a_{pk} に対して，$p \neq q$ となる q 行目の成分 a_{qk} を対応させ，置き換えてみる．このとき，新たに得られた行列式は，2 つの行が等しくなるから定理 15.5 よりゼロとなる．$a_{pk} = a_{qk}$ であるため，(1) は

$$0 = a_{q1}A_{p1} + a_{q2}A_{p2} + \cdots + a_{qn}A_{pn} = \sum_{k=1}^{n} a_{qk}A_{pk}$$

すなわち，

$$\sum_{k=1}^{n} a_{qk}A_{pk} = 0 \qquad (p \neq q) \tag{2}$$

に置き換えられる．行ではなく列を用いても，同様に

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kq}A_{kp} = 0 \qquad (p \neq q) \tag{3}$$

となることを示せる．もし $p = q$ となる場合，(2) と (3) はそれぞれ

$$\sum_{k=1}^{n} a_{pk}A_{pk} = \det(A) \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kp}A_{kp} = \det(A) \tag{5}$$

となる．

逆行列

問題 15.17　逆行列が

$$A^{-1} = \frac{(A_{jk})^T}{\det(A)} = \frac{(A_{kj})}{\det(A)}$$

となることを証明せよ．ただし，(A_{jk}) は余因子 A_{jk} から成る行列である．

解答

逆行列の定義を使って $AA^{-1} = I$，つまり単位行列となることを示す．これを行うために，積

$$A(A_{jk})^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

を検討する．ここで，行列に関する積の法則より [これは行列式でも成り立つことである]，結果の行列の成分 c_{qp} は，左の行列の q 番目の行と右の行列の p 番目の列の要素同士の積を総和したものである．したがって，

$$c_{qp} = a_{q1}A_{p1} + a_{q2}A_{p2} + \cdots + a_{qn}A_{pn} = \sum_{k=1}^{n} a_{qk}A_{pk}$$

を得る．一方で，問題 15.16 の結果より，

$$c_{qp} = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ \det(A) & (p = q) \end{cases}$$

である．その結果，

$$A(A_{jk})^T = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{pmatrix}$$

になる．このとき，$\det(A) \neq 0$ である場合，

$$\frac{A(A_{jk})^T}{\det(A)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

と表すことができ，これは，結果として $AB = I$ であり，

$$B = A^{-1} = \frac{(A_{jk})^T}{\det(A)}$$

となる．

問題 15.18　以下に答えよ.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(b) 上の結果を，積を実行することで確かめよ.

解答

(a) A の余因子を成分に持つ行列は

$$(A_{jk}) = \begin{pmatrix} 7 & -14 & -7 \\ 6 & -2 & -11 \\ 2 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

と与えられる．そしてこの行列の転置は次のようになる.

$$(A_{jk})^T = (A_{kj}) = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ -14 & -2 & 11 \\ -7 & -11 & 8 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 35$ であるから 問題 15.8,

$$A^{-1} = \frac{(A_{jk})^T}{\det(A)} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ -14 & -2 & 11 \\ -7 & -11 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{6}{35} & \frac{2}{35} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{35} & \frac{11}{35} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{11}{35} & \frac{8}{35} \end{pmatrix}$$

を得る.

(b)

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{6}{35} & \frac{2}{35} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{35} & \frac{11}{35} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{11}{35} & \frac{8}{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$A^{-1}A = I$ となることもまた示すことができる.

問題 15.19　$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ となることを証明せよ.

解答

$X = (AB)^{-1}$ と置く．このとき $(AB)X = I$ となる（I は単位行列）．そして結合法則によりこの式は $A(BX) = I$ となる．A^{-1} を左から掛けることで $A^{-1}[A(BX)] = A^{-1}I = A^{-1}$ を得る．更に結合法則を用いると $(A^{-1}A)(BX) = A^{-1}$ または $I(BX) = A^{-1}$ となる．すなわち，$BX = A^{-1}$ である．B^{-1} を左から掛け，結合法則をもう一度使うと，$B^{-1}(BX) = B^{-1}A^{-1}$, $(B^{-1}B)X = B^{-1}A^{-1}$, $IX = B^{-1}A^{-1}$ となり，$X = B^{-1}A^{-1}$ を得る．

問題 15.20　A が正則行列であるとき，$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$ となることを証明せよ．

解答

$AA^{-1} = I$ より，$\det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$ となる．一方で定理 15.8 から，$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$ を得る．したがって，$\det(A^{-1})\det(A) = 1$ となり目的の結果を導ける．

直交行列，ユニタリ行列．直交ベクトル

問題 15.21　$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が直交行列であることを示せ．

解答

A は実行列であるから，$A^TA = I$ を示す必要がある．実際に計算してみると，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いて，

$$A^TA = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

を得る．ゆえに A は直交行列である．

問題 15.22　$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/2 & 0 \\ i\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ がユニタリ行列であることを示せ．

解答

A は複素行列であるから，$\bar{A}^T A = I$ を示す必要がある．実際に計算してみると，

$$\bar{A}^T A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/2 & 0 \\ i\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/2 & 0 \\ i\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

を得るので A はユニタリ行列である．

問題 15.23　A が直交行列のとき，$\det(A) = \pm 1$ となることを証明せよ．

解答

A は直交行列なので，$A^T A = I$ となり，定理 15.8(p.6) より，

$$\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det I = 1 \tag{1}$$

となる．しかし，$\det(A^T) = \det(A)$ であるから (1) は

$$[\det(A)]^2 = 1 \qquad \text{または,} \qquad \det(A) = \pm 1$$

になる．

問題 15.24　以下のベクトルが，正規直交系 (集合) を成すことを示せ．

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解答

実ベクトルであるから，

$$A_j^T A_k = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

を示さなければならない．
$j = k = 1$ のとき，

$$A_1^T A_1 = (\cos\theta \ \sin\theta \ 0) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

を得る．同様に $j = k = 2$ や $j = k = 3$ の場合，$A_2^T A_2 = 1$, $A_3^T A_3 = 1$ と求められる．ゆえに A_1, A_2, A_3 は単位ベクトルである．

任意の二つのベクトルの直交性を示すために，例えば $j=1$, $k=2$ の場合を考える．この場合，

$$A_1^T A_2 = (\cos\theta\ \sin\theta\ 0)\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

となる．同様に $A_1^T A_3 = 0$, $A_2^T A_3 = 0$ であるので，ベクトルは互いに直交する．したがって，与えられたベクトルは正規直交系を成すことがわかる．

線形方程式系

問題 15.25　クラメルの規則である (20) の式 [p.10] は，方程式系 (16) を解くための規則である．この規則を証明せよ．ただし，$m=n$ とする．

解答

方程式系は

$$\sum_{q=1}^{n} a_{kq} x_q = r_k \qquad k = 1, \cdots, n$$

と書くことができる．ここに余因子 A_{kp} を掛け，

$$A_{kp} \sum_{q=1}^{n} a_{kq} x_q = r_k A_{kp}.$$

次に $k=1$ から n への総和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n} A_{kp} \sum_{q=1}^{n} a_{kq} x_q = \sum_{k=1}^{n} r_k A_{kp}$$

を得る．この式は

$$\sum_{q=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{n} A_{kp} a_{kq} \right\} x_q = \sum_{k=1}^{n} r_k A_{kp} \tag{1}$$

と変形できる．

ここで，問題 15.16 の (3) および (5) より，

$$\sum_{k=1}^{n} A_{kp} a_{kq} = \begin{cases} 0 & q \neq p \\ \det(A) & q = p \end{cases}$$

を得る．
したがって (1) は

$$\det(A)x_p = \sum_{k=1}^{n} r_k A_{kp}$$

となるので，$\varDelta = \det(A)$ とした場合，

$$x_p = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k A_{kp}}{\varDelta} \qquad p = 1, \dots, n \tag{2}$$

となる．式 (2) の分子は p 番目の列が列ベクトル $(r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_n)^T$ で置換された行列式であるため，クラメルの規則が成り立つことになる．

問題 15.26　逆行列を用いて 問題 15.25 を解け．

解答

(17) または (18) の系を，p.10 の (19) の形式，つまり

$$X = A^{-1}R$$

とし，これを解くことを考える．ここで，

$$A^{-1} = \frac{(A_{kj})}{\det(A)} = \frac{(A_{kj})}{\varDelta}, \qquad R = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

である．これらを代入すると，

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}R = \frac{1}{\varDelta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\varDelta}\begin{pmatrix} A_{11}r_1 + A_{21}r_2 + \cdots + A_{n1}r_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n}r_1 + A_{2n}r_2 + \cdots + A_{nn}r_n \end{pmatrix}$$

となり，これは

$$x_p = \frac{A_{1p}r_1 + A_{2p}r_2 + \cdots + A_{np}r_n}{\varDelta}$$

と導けて 問題 15.25 の (2) と一致する．

問題 15.27　方程式系

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10 \\ \ \ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 4x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = \ \ 3 \end{cases}$$

を以下の方法で解け．
(a) クラメルの規則を用いた解法　(b) 逆行列を用いた解法

解答

(a) クラメルの規則より，

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\varDelta}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\varDelta}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 10 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\varDelta}$$

となる．ここで係数の行列式は

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 35$$

である 問題 15.8．他の行列式を求めると解は $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -1$ となる．
(b) 行列形式にすると系は

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{または,} \qquad AX = R \tag{1}$$

として表現できる．(1) の最初の行列 A の逆行列は 問題 15.18 で求めているので，(1) の両辺にこの逆行列を掛けると，$A^{-1}A = I$ という事実を用いると，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{6}{35} & \frac{2}{35} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{35} & \frac{11}{35} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{11}{35} & \frac{8}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を得る．したがって，$x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -1$ となる．
　幾何学的には，点 $(2,\ -3,\ -1)$ で交差する 3 つの平面を表している．

問題 15.28　以下の方程式を解け．

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

解答

クラメルの規則より

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & -4 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 7 & 4 & -4 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

が得られる．ここで，

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

である．これを求めると，形式的に，

$$x_1 = \frac{16}{0}, \quad x_2 = \frac{80}{0}, \quad x_3 = \frac{144}{0} \tag{1}$$

となりこの系には解がないことを示している．

なお，第一の方程式と第二の方程式にそれぞれ 2 と 3 を掛けてそれらを加えると，$7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 12$ を得る．この式は第三の方程式，すなわち $7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -4$ と一致しない．ゆえにこの方程式の系は**矛盾** (inconsistent) となる．

幾何学的には，最初の 2 つの方程式は直線で交差する 2 つの平面を表している．3 番目の方程式はその直線に並行な平面を表している．理論的にはこれらの平面は（(1) の可能な解釈から）無限遠点で交わる．

問題 15.29　以下の方程式を解け．

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 12 \end{cases}$$

解答

この場合，クラメルの規則を形式的に適用することにより

$$x_1 = \frac{0}{0}, \qquad x_2 = \frac{0}{0}, \qquad x_3 = \frac{0}{0}$$

が得られる．理論的には 0/0 は任意の数を表すことができるので，この結果は系に無限の解があることを示している．

なお，第一の方程式と第二の方程式にそれぞれ 2 と 3 を掛けてそれらを足し合わせると，第三の方程式が得ることができる．この結果から，第三の方程式は最初の 2 つの方程式から得られるため必要ではない．この方程式の系を**従属**，より正確には**線形従属**と呼ぶ．

幾何学的には，最初の 2 つの方程式は直線で交差する 2 つの平面を表している．そして 3 番目の方程式で表される平面はその直線を通る．

可能な解を得るには，例として x_3 に異なる値を割り当てる．ゆえに $x_3 = 1$ とすると，$x_1 = 17/9$, $x_2 = 4/9$ となり直線上の点 (17/9, 4/9, 1) を得る．その他の解に関しても同様に得られる．

問題 15.30　以下の方程式を解け．

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

解答

クラメルの規則より解

$$x_1 = \frac{0}{35} = 0, \qquad x_2 = \frac{0}{35} = 0, \qquad x_3 = \frac{0}{35} = 0$$

を得る 問題 15.8．この結果から唯一の解は自明な解となる．

幾何学的には，これらの方程式は点 (0, 0, 0) で交差する 3 つの平面を表す．

問題 15.31　以下の方程式を解け．

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

解答

クラメルの規則を形式的に適用すると，

$$x_1 = \frac{0}{0}, \qquad x_2 = \frac{0}{0}, \qquad x_3 = \frac{0}{0}$$

が得られ，自明で明白な $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ 以外にも無限に多くの解があることを示している．これらの解は，問題 15.29 のように x_3 に異なる値を割り当てることで求めることができる．第三の方程式は，第一・第二の方程式をそれぞれ 2 倍・3 倍したものを足し合わせることで得られるので，これらの方程式は従属である．

問題 15.32　以下の系おいて，k がどの値をとれば自明でない解があると言えるか，答えよ．

$$\begin{cases} 2x + ky + z = 0 \\ (k-1)x - y + 2z = 0 \\ 4x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

解答

クラメルの規則を形式的に適用することで，

$$x = \frac{0}{\Delta}, \qquad y = \frac{0}{\Delta}, \qquad z = \frac{0}{\Delta}$$

を得る．このとき，$\Delta \neq 0$ の場合，系は自明な解 $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ を持つことになる．系が自明でない解を持つためには，$\Delta = 0$，すなわち

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{または，} \qquad 9k - 9 - 4k(k-1) = 0$$

とする必要がある．この式を解くことで，$k = 1,\ 9/4$ となることがわかる．

固有値と固有ベクトル

問題 15.33　以下の行列の固有値を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

解答

方法 1. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とした場合，方程式 $AX = \lambda X$，すなわち，

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

または,

$$\begin{pmatrix} 5x_1 + 7x_2 - 5x_3 \\ 4x_2 - \ \ x_3 \\ 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$$

を考える必要がある．これらの行列の要素を対応させると,

$$\begin{aligned} (5-\lambda)x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= 0 \\ (4-\lambda)x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - (3+\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

となることがわかる．そしてこの系は

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

の場合であれば非自明な解を持つことになる．この行列式を展開すると

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \qquad \text{または,} \qquad (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

が得られる．したがって，固有値は $\lambda = 1, 2, 3$ となる．

方法 2. $AX = \lambda X$ は $AX = \lambda IX$ として書くことができ，$(A-\lambda I)X = \mathbf{0}$ となる．I と $\mathbf{0}$ はそれぞれ単位行列とゼロ行列であり，

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

となる．$\det(A - \lambda I) = \mathbf{0}$ の場合，自明でない解が存在し，方法 1 のように進めることができる．式 (2) は，各対角要素から λ を引くことで記述できることに注目しよう．

> **問題 15.34**
> (a) 問題 15.33 で求めた行列 A の固有値に対応する固有ベクトル求め,
> (b) それらの固有ベクトルを正規化せよ．

解答

(a) $\lambda = 1$ に対応して，問題 15.33 の式 (1) は

$$\begin{aligned} 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

となる．x_1 と x_3 を x_2 の式で解くと，$x_3 = 3x_2$，$x_1 = 2x_2$ と求まる．このとき固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

だが，スカラー倍の任意性を除き，単に

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とする．

同様に，$\lambda = 2$ に対応して，問題 15.33 の式 (1) から $x_3 = 2x_2$，$x_1 = x_2$ となり，そ

れから固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{または単に} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が導かれる.

最後に，$\lambda = 3$ の場合は $x_3 = x_2$，$x_1 = -x_2$ を得るので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{または単に} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と与えられる.

(b) 正規化された固有ベクトルは，長さが 1 であるという性質を持つ．すなわち，ベクトルが持つ成分の二乗和が 1 となる．そのような固有ベクトルを得るには，各ベクトルを，成分の二乗和の平方根で割ればよい．したがって，(a) で求めた固有ベクトルはそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

となる.

問題 15.35　以下に答えよ.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の (a) 固有値および (b) 固有ベクトルを求めよ.

解答

(a) 固有値は $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$ の解で，それは $\lambda = 1, 4, 6$ と与えられる.

(b) $(A - \lambda I)X = 0$ から,

$$\begin{aligned} (2-\lambda)x_1 - 2x_3 &= 0 \\ (4-\lambda)x_2 &= 0 \\ -2x_1 + (5-\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

を得る.

このとき，$\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と求まる．

$\lambda = 4$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と求まる．

$\lambda = 6$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ と求まる．

問題 15.36　以下に答えよ．

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の (a) 固有値，および (b) 固有ベクトルを求めよ．

解答

(a) 通常のやり方を使うことで，固有値は

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{または，} \qquad \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$$

の解である．このとき解は，

$$\lambda = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$$

となる．

(b) 固有ベクトルを定める方程式は，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

すなわち，

$$\left.\begin{aligned} (\cos\theta - \lambda)x_1 - (\sin\theta)x_2 &= 0 \\ (\sin\theta)x_1 + (\cos\theta - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

を通して求められる．$\lambda = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いることで，(1) より $x_2 = -ix_1$ となるから，対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -ix_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad \text{または単に} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

となる．一方 $\lambda = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ を用いることで $x_2 = ix_1$ となるから，対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ix_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \text{または単に} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

となる．

固有値と固有ベクトルに関する定理

問題 15.37　エルミート行列 [または対称実行列] の固有値が実数となることを証明せよ．

解答

A はエルミート行列で，λ をその固有値とする．このとき，定義より

$$AX = \lambda X$$

を満たす非自明な固有ベクトル X が存在する．$\bar{X}^T$ を左から掛けると，

$$\bar{X}^T A X = \lambda \bar{X}^T X \tag{1}$$

となり，この式の複素共役をとると

$$X^T \bar{A} \bar{X} = \bar{\lambda} X^T \bar{X} \tag{2}$$

が得られる．次にこの得られた式に対して，p.3 の (5) の第二・第三式を用いて転置をとると，

$$\bar{X}^T \bar{A}^T X = \bar{\lambda} \bar{X}^T X \tag{3}$$

となる．

ここで，A はエルミート行列，つまり $\bar{A}^T = A$ であるから，(3) は

$$\bar{X}^T A X = \bar{\lambda} \bar{X}^T X \tag{4}$$

である．そして，(4) から (1) を引くことで，

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \bar{X}^T X = 0$$

が得られる．$\bar{X}^T X$ は 0 でないことより，$\lambda = \bar{\lambda}$ であること，すなわち λ が実数でなければならないことが示された．

問題 15.38　異なる固有値に属している，エルミート行列 [または対称実行列] の固有ベクトルは互いに直交することを証明せよ．

解答

X_1 と X_2 を，固有値 λ_1 と λ_2 に属する固有ベクトルとする．行列を A と表したとき，

$$AX_1 = \lambda_1 X_1, \qquad AX_2 = \lambda_2 X_2 \tag{1}$$

を得る．これらの式にそれぞれ $\bar{X}_2^T$ と $\bar{X}_1^T$ を左から掛けると，

$$\bar{X}_2^T A X_1 = \lambda_1 \bar{X}_2^T X_1, \qquad \bar{X}_1^T A X_2 = \lambda_2 \bar{X}_1^T X_2 \tag{2}$$

となることがわかる．

(2) の第一式の複素共役をとると，λ_1 が実数であることから，

$$X_2^T \bar{A} \bar{X}_1 = \lambda_1 X_2^T \bar{X}_1 \tag{3}$$

となり，(3) の転置を求めると，

$$\bar{X}_1^T \bar{A}^T X_2 = \lambda_1 \bar{X}_1^T X_2 \tag{4}$$

となる．A はエルミート行列，つまり $\bar{A}^T = A$ となるから，(4) は

$$\bar{X}_1^T A X_2 = \lambda_1 \bar{X}_1^T X_2$$

とできる．この式から (2) を引くと，

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \bar{X}_1^T X_2 = 0$$

を得る．したがって，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば $\bar{X}_1^T X_2 = 0$ を得る．すなわち X_1 と X_2 は互いに直交していることが示せた．

問題 15.39　以下に答えよ．
(a) 問題 15.37 および 問題 15.38 の結果を満たすような例を挙げよ．
(b) 実固有値をもつ行列は，必ずエルミートであるか？

解答

(a) 問題 15.35 の行列 A は対称実行列だからエルミート行列であり，そこで示したように，固有値は全て実数であった．また固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

であり，互いに直交している．

(b) 行列はエルミートでなくても実固有値を持つ．例えば，問題 15.33 の行列を見よ．

問題 15.40

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ に対して，ケーリーハミルトンの定理 [定理 15.14(p.11)] が成り立つことを確かめよ．

解答

特性方程式は

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{または,} \qquad \lambda^2 - 7\lambda + 14 = 0.$$

定理を満たすことを確かめるためには，行列 A が

$$A^2 - 7A + 14I = O$$

を満たさなければならない．この式は特性方程式上の λ を A に置き換え，また定数項 [今回の場合は 14 の項] と 0 を，それぞれ $14I$ と O に置き換えたものである．

実際に計算すると

$$\begin{aligned} A^2 - 7A + 14I &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + 14\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21 & -14 \\ 7 & -28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \end{aligned}$$

より，確かに成り立つことがわかる．

問題 15.41　問題 15.33 の行列を対角行列に変換することで，定理 15.15(p.11) が成り立つことを確かめよ．

解答

$\boxed{\text{問題 15.33}}$ の行列の固有ベクトルは

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の各列である（これらは $\boxed{\text{問題 15.34}}$ で示した）．B の逆行列は

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

と与えられる．したがって，

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

問題 15.42　定理 15.15 を証明せよ．

解答

任意の正方行列でもまったく同じ議論で証明できるから，3 次行列の場合に対してのみ証明する．A の固有ベクトルを各列に持つ

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

を考え，対応する固有値をそれぞれ λ_1, λ_2, λ_3 と置く．このとき，固有値の定義より

$$A\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}.$$

このことから，

$$AB = A\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \lambda_3 b_{13} \\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \lambda_3 b_{23} \\ \lambda_1 b_{31} & \lambda_2 b_{32} & \lambda_3 b_{33} \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= B \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}
$$

となる．ゆえに B^{-1} を左から掛けると，目的の結果である

$$
B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}
$$

を得る．

問題 15.43　以下に答えよ．

(a) 以下のように X と A が与えられたとき，二次形式「$2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3 = X^TAX$」を示せ．

$$
X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}
$$

(b) (a) にあった交差項を取り除く x_1, x_2, x_3 と u_1, u_2, u_3 の間の線形変換を求め，u_1, u_2, u_3 での二次形式を書け．

解答

(a) 実際に計算すると，

$$
X^TAX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_3 \\ 4x_2 \\ -2x_1 + 5x_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3
$$

を得る．x_1^2, x_2^2, x_3^2 の各係数，すなわち 2, 4, 5 が主対角線上に現れ，$x_j x_k (j \neq k)$ の係数の 1/2 が j 行 k 列の要素に現れていることに注目しよう．

(b) u_1, u_2, u_3 から x_1, x_2, x_3 への線形変換は $X = BU$ と書ける．ここで，$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ より，B は 3×3 行列である．このとき，

$$X^T A X = (BU)^T A (BU) = U^T (B^T A B) U \tag{1}$$

となる．ここで (1) の右辺は交差項を持たないと仮定しているから，$B^T A B$ は対角行列である．このことから $B^T = B^{-1}$ となる場合 [すなわち B が直交行列である場合]，問題は A の固有値と固有ベクトルを求めることに帰着する．これらは既に $\boxed{\text{問題 15.35}}$ で求めた．B を正規化された固有ベクトルから成る行列，すなわち

$$B = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

とすると B は直交行列 $B^T = B^{-1}$ であることが容易に分かり，目的となる以下の結果を得る．

$$B^{-1} A B = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

このとき (1) は，

$$X^T A X = U^T (B^{-1} A B) U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1^2 + 4u_2^2 + 6u_3^2$$

となり，**標準形**と呼ばれる二次形式になる．以上より，U から X への変換 $X = BU$ は

$$x_1 = \frac{2u_1 + u_3}{\sqrt{5}}, \quad x_2 = u_2, \quad x_3 = \frac{u_1 - 2u_3}{\sqrt{5}}.$$