第 1 章

予備知識の復習：微積分，行列，複素数

実数

数学の基礎となるのは「数学的対象 (object) の**集まり** (**集合**)」の概念である．その中でも「**数**の集合」は，理工学分野における定量的な研究の基礎となる．既知の内容かもしれないが，重要となる数の集合に関して以下にまとめた．

1. 自然数 $1, 2, 3, 4, \ldots$ **：**
　正の整数は数え上げに使われる．

2. 整数 $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ **：**
　これらの数は任意の 2 つの自然数の**引き算 (差)**[**足し算 (和)** の逆演算] に意味を与えるために発生した．負の整数や 0 を扱えるようになるため，$2 - 6 = -4$ や $8 - 8 = 0$ 等が意味を持つようになる．

3. 有理数 $2/3$, $-10/7$ **など：**
　任意の 2 つの整数の**割り算 (除法)**[**掛け算 (積)** の逆演算]，すなわち**商**に意味を与えるために発生した．ただし，0 で割る割り算は定義されない．

4. 無理数 $\sqrt{2}$, π **など：**
　これらの数は 2 つの整数の商として表すことができない．

なお，自然数集合は整数集合の一部（**部分集合**）であり，整数集合は有理数集合の部分集合である．

有理数または無理数で構成される数の集合は**実数**集合と呼ばれ，**正**と**負**の数，**ゼロ**で構成される [**虚数**（**複素数**）と区別するためにそう呼ばれる (p.17 で定義している)]．実数は，図 1-1 に示すように線上の**点**として表すことができる．このため**点**を**数**と同じ意味で使用することがある．

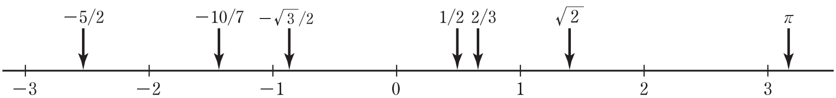


図 1-1

不等式についても整理する．$a-b$ が正の場合 a は b **より大きい**といい，$a-b$ が負の場合 a は b **より小さい**という [これらはそれぞれ $a>b$, $a<b$ と表す]．任意の実数 a と b は，$a>b$，$a=b$，$a<b$ の内のいずれかでなければならない．

代数の規則

a, b, c が任意の実数のとき，以下の代数規則が成り立つ．

1.	$a+b=b+a$	和に関する交換法則
2.	$a+(b+c)=(a+b)+c$	和に関する結合法則
3.	$ab=ba$	積に関する交換法則
4.	$a(bc)=(ab)c$	積に関する結合法則
5.	$a(b+c)=ab+ac$	分配法則

これらの規則を（**公理** (axiom)・**公準** (postulate) として）受け入れた場合，$(-5)(3)=-15$, $(-2)(-3)=6$ などのような，符号規則を証明することができる．

以下の**指数**に関する規則についても押さえておこう．

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m/a^n = a^{m-n}\,(a \neq 0), \quad (a^m)^n = a^{mn}. \tag{1}$$

関数

関数に関する概念も重要である．関数 f はある集合 A 中の**要素** (または**元**) と呼ばれる対象 x に，ある集合 B の要素 y を割り当てる規則である．この対応関係を明示するために，$y=f(x)$ と書く．$f(x)$ を x における関数の**値**とよぶ．

例 1.

$f(x)=x^2-3x+2$ のとき，$f(2)=2^2-3(2)+2=0$

「関数のグラフ化」を行う方法は，数の組 (x, y) を求め，これを xy 座標系に点としてプロットすることで実現できる．通常 $y=f(x)$ は**曲線**で表される．y は x によって決まるから，x を**独立変数**，y を**従属変数**と呼ぶ．

関数の例

1. 多項式 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$ **：**

$a_0 \neq 0$ ならば，n をその多項式の**次数**と言う．多項式方程式 $f(x) = 0$ の根は，重複も数えると正確に n 個になる．例えば，$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ ならば $(x-1)^3 = 0$ と変形できるので 3 個ある根は 1, 1, 1 となる．なお，上の式変形では，**二項定理**

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2 + \cdots + x^n \tag{2}$$

を使った．**二項係数**は以下で与えられる．

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{3}$$

ここで，n の**階乗** $n!$ は $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$ である．ただし，定義として $0! = 1$ とする．

2. 指数関数 $f(x) = a^x$ **：**

これらの関数は (1) の性質に従う．$a = e = 2.7182818\cdots$(ネイピア数) の場合が重要である．

3. 対数関数 $f(x) = \log_a(x)$ **：**

これらの関数は指数関数の**逆関数**，つまり $a^x = y$ としたときの $x = \log_a(y)$ であり，a を対数の**底**と言う．通常 x と y を入れ替えて $y = \log_a(x)$ と表記する．$a = e$ の場合，この関数は**自然対数**と呼ばれ，$\log_e x$ を $\ln x$ として表す．自然対数 [または任意の底の対数] は次の基本的な規則を満たす．

$$\ln(mn) = \ln m + \ln n, \quad \ln\frac{m}{n} = \ln m - \ln n, \quad \ln m^p = p \ln m. \tag{4}$$

4. 三角関数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ **：**

これらの関数間のいくつかの基本的な関係は以下の通り．

(a) $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$

(b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \sec^2 x - \tan^2 x = 1, \qquad \csc^2 x - \cot^2 x = 1$

(c) $\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x, \qquad \tan(-x) = -\tan x$

(d) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm tany}{1 \mp \tan x \tan y}$$

(e)　$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(x + \alpha)$　$(\tan\alpha = A/B)$

三角関数は周期的な関数である．例えば，$\sin x$ と $\cos x$ はそれぞれ図 1-2 と図 1-3 で示すように，2π の周期を持つ．

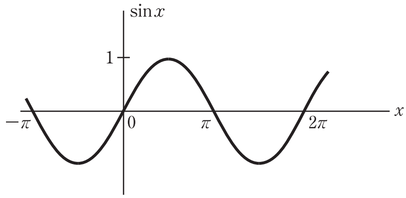


図 1-2

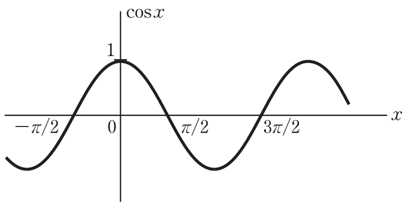


図 1-3

5. 逆三角関数 $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\cot^{-1} x$, $\sec^{-1} x$, $\csc^{-1} x$：

これらは三角関数の**逆関数**である．例えば，$\sin x = y$ の場合は $x = \sin^{-1} y$ となる (通常 x と y を入れ替えて $y = \sin^{-1} x$ とかく)．

6. 双曲線関数：

これらは指数関数を用いて以下のように定義される．

(a)　$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,　　$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

以下の基本的な恒等式は三角関数と類似している．

(b)　$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,　$\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$,　$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

(c)　$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

$\sinh^{-1} x$, $\cosh^{-1} x$ などで与えられる逆双曲線関数は対数で表すことができる $\boxed{\text{問題 1.9}}$.

極限

x が限りなく a に近づいたとき，関数 $f(x)$ が l に限りなく近づく場合，$f(x)$ は**極限** l を持つといい，$\lim_{x\to a} f(x) = l$ と表す．より厳密に定義すると $\lim_{x\to a} f(x) = l$ とは，「任意の数 $\varepsilon > 0$ に対してある数 $\delta > 0$ が決まり，$0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x)-l| < \varepsilon$ を満たす」ことをいう．

なお，p の**絶対値**である $|p|$ は，$p > 0$ の場合は p，$p < 0$ の場合は $-p$，$p = 0$ の場合は 0 に等しいことに注意.

例 2.

$$\lim_{x\to 1}(x^2-4x+8) = 5, \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$\lim_{x\to a} f_1(x) = l_1$，$\lim_{x\to a} f_2(x) = l_2$ のとき，極限に関する次の定理が成り立つ.

(a) $\lim_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) = l_1 \pm l_2$

(b) $\lim_{x\to a}[f_1(x)f_2(x)] = \left[\lim_{x\to a} f_1(x)\right]\left[\lim_{x\to a} f_2(x)\right] = l_1 l_2$

(c) $l_2 \neq 0$ なら，$\lim_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$

連続

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ が成り立つならば，関数 $f(x)$ は a で**連続**であるという．

例 3.

$f(x) = x^2-4x+8$ は $x=1$ で連続である．一方で，$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 6 & x = 2 \end{cases}$

としたとき，$f(x)$ は $x=2$ で連続ではなく，$x=2$ は $f(x)$ の**不連続点**という．

$f(x)$ が $x_1 \leq x \leq x_2$ や $x_1 < x \leq x_2$ のような区間の各点で連続ならば，**区間で連続**であるという．

$f_1(x)$ と $f_2(x)$ がある区間で連続の場合，$f_1(x) \pm f_2(x)$ や $f_1(x)f_2(x)$，$f_1(x)/f_2(x)$ $(f_2(x) \neq 0)$ もまたその区間で連続となる．

微分

点 x における $y = f(x)$ の**微分係数**は，極限値

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \tag{5}$$

として定義される．ここで，$h = \Delta x$, $\Delta y = f(x+h) - f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ である．

$y = f(x)$ の**全微分**は

$$dy = f'(x)dx \quad (dx = \Delta x) \tag{6}$$

で定義される．

微分係数に対応させる関数は**導関数**と呼ばれる．また，$y' = dy/dx = f'(x)$ のさらなる微分をとることで，二次，三次，高次の微分を求めることができる．これらは $y'' = d^2y/dx^2 = f''(x)$, $y''' = d^3y/dx^3 = f'''(x)$ などの形で表される．

幾何学的にいえば，ある点における関数 $f(x)$ の微分係数はその点の曲線 $y = f(x)$ に引かれた**接線の傾き**を表している．

関数がある点で微分係数を持つならその点で連続だが，逆は必ずしも成り立つとは限らない．

微分の公式

以下の u, v は x の関数を表し，a, c, p は定数とする．もちろん，u および v の微分係数が存在すること，すなわち u と v は**微分可能**であることを仮定している．

1. $\displaystyle \frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$
2. $\displaystyle \frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$
3. $\displaystyle \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dx}$
4. $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$
5. $\displaystyle \frac{d}{dx}u^p = pu^{p-1}\frac{du}{dx}$
6. $\displaystyle \frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}$
7. $\displaystyle \frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$
8. $\displaystyle \frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$
9. $\displaystyle \frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$
10. $\displaystyle \frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$

11. $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$

12. $\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$

13. $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$

14. $\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$

15. $\frac{d}{dx}\sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$

16. $\frac{d}{dx}\cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$

17. $\frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$

18. $\frac{d}{dx}\cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$

19. $\frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$

20. $\frac{d}{dx}\cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$

$u = x$ となる場合は，$du/dx = 1$ なので，上記の公式はより簡略化される．

積分

$dy/dx = f(x)$ としたとき，y を $f(x)$ の**不定積分**と呼び，

$$\int f(x)\,dx \tag{7}$$

と表記する．定値関数の導関数は 0 なので，$f(x)$ のすべての不定積分は定数の違いを除くとひとつしかない．

$f(x)$ に対する $x = a$ と $x = b$ の間の**定積分**は，極限値

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+(n-1)h)] \quad \left(h = \frac{b-a}{n}\right), \tag{8}$$

と定義される．定積分は幾何学的にいえば，$f(x) \geq 0$ の場合，x 軸と縦線 $x = a, x = b$ で囲まれた曲線 $y = f(x)$ の面積を求めることに対応している．定積分は $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続ならば存在する．

定理 1.1 (微積分の基本定理)

$f(x) = \frac{d}{dx}g(x)$ のとき，

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{d}{dx}g(x)dx = g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

が成り立つ．

例 4.

$$\int_1^2 x^2 dx = \int_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

以上の操作をまとめて**積分**と呼ぶ.

積分の公式

以下の u, v は x の関数を表し，a, b, c, p は定数とする．また，全ての例において積分定数を省略している.

1. $\displaystyle\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$

2. $\displaystyle\int cu dx = c \int u dx$

3. $\displaystyle\int u \left(\frac{dv}{dx}\right) dx = uv - \int v \left(\frac{du}{dx}\right) dx$　または　$\displaystyle\int u dv = uv - \int v\, du$

この公式は**部分積分**と呼ばれる.

4. $\displaystyle\int F[u(x)] dx = \int F(w) \frac{dw}{w'}$　$(w = u(x),\ w' = dw/dx)$

上式のように w の関数に置き換えることができる．この公式は**置換積分**と呼ばれる.

5. $\displaystyle\int u^p\, du = \frac{u^{p+1}}{p+1},\ \ p \neq -1$

6. $\displaystyle\int u^{-1}\, du = \int \frac{du}{u} = \ln u$

7. $\displaystyle\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a},\ \ a \neq 0, 1$

8. $\displaystyle\int e^u\, du = e^u$

9. $\displaystyle\int \sin u\, du = -\cos u$

10. $\displaystyle\int \cos u\, du = \sin u$

11. $\displaystyle\int \tan u\, du = -\ln \cos u$

12. $\displaystyle\int \cot u\, du = \ln \sin u$

13. $\displaystyle\int \sec u\, du = \ln(\sec u + \tan u)$

14. $\displaystyle\int \csc u\, du = \ln(\csc u - \cot u)$

15. $\displaystyle\int e^{au} \sin bu\, du = \frac{e^{au}(a \sin bu - b \cos bu)}{a^2 + b^2}$

16. $\displaystyle\int e^{au} \cos bu\, du = \frac{e^{au}(a \cos bu + b \sin bu)}{a^2 + b^2}$

17. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a}$

18. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}$

19. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2-a^2})$

20. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2+a^2})$

21. $\displaystyle\int \sinh u\,du = \cosh u$

22. $\displaystyle\int \cosh u\,du = \sinh u$

数列と級数

$u_1, u_2, \ldots$ または単に $\langle u_n \rangle$ と表される**数列**とは，自然数集合上で定義される「関数」である．数列が**極限** l を持つ，または l に**収束**するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対しある自然数 $N > 0$ が存在して，$n > N$ ならば $|u_n - l| < \varepsilon$ が成り立つことと定義され，このとき $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ と書く．数列が収束しない場合，その数列は**発散**するという．

$u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3, \ldots$ または $S_1, S_2, S_3, \ldots (S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n)$ となる数列を考える．$\langle S_n \rangle$ は数列 $\langle u_n \rangle$ の**部分和**数列という．また，

$$u_1+u_2+u_3+\cdots \quad \text{または} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{または (これを省略して)} \quad \sum u_n \tag{9}$$

という記号は $\langle S_n \rangle$ と同じ意味で定義され，**無限級数**とよばれる．$\langle S_n \rangle$ が収束または発散するのに応じて，無限級数は収束または発散することになる．もし級数が S という数に収束したとき，この S を級数の**和**という．

以下は，無限級数に関連する重要な定理である．

定理 1.2

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ は，$p > 1$ のとき収束し，$p \leq 1$ のとき発散する．

定理 1.3

$\sum |u_n|$ が収束し，$|v_n| \leq |u_n|$ ならば，$\sum |v_n|$ も収束する．

定理 1.4

$\sum |u_n|$ が収束するならば，$\sum u_n$ も収束する．

このような場合，$\sum u_n$ は**絶対収束**するという．このような性質を持つ級数は「和」に影響を与えずに項を並べ替えることができる．

定理 1.5

$\sum |u_n|$ が発散し，$v_n \geq |u_n|$ ならば，$\sum v_n$ も発散する．

定理 1.6

$|u_n| = f(n) \geq 0$ となる級数 $\sum |u_n|$ は，$\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M f(x)\,dx$ が存在するか，存在しないかによって，収束または発散する．

この定理は**積分判定法**と呼ばれる．

定理 1.7

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|u_n| \neq 0$ ならば，級数 $\sum |u_n|$ は発散する．他方，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|u_n| = 0$ のときは，その級数は収束したりしなかったりと，どちらもあり得る $\boxed{\text{問題 1.31}}$.

定理 1.8

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = r$ と置く．このとき級数 $\sum u_n$ は，$r < 1$ のとき（絶対）収束し，$r > 1$ のときは発散する．$r = 1$ となる場合は結論が出ない．

この定理は**収束判定法**と呼ばれる．

上記の考え方は，u_n が x の関数で $u_n(x)$ と表される場合に拡張できる．この場合，数列または級数は x の特定の値に応じて収束または発散する．数列や級数が収束する x の値の集合を**収束領域**といい，$\mathcal{R}$ と表す．

例 5.

級数 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ は，実数 x に限定すると，$-1 < x < 1$ で与えられる収束領域 $\mathcal{R}$ を持つ．

一様収束

$S_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，一般的に「ε と x の両方に依存する」ある数 N が存在して，$n > N$ ならば $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ が成り立つとき，級数 $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ は領域 $\mathcal{R}$ 上で和 $S(x)$ に収束するという．もし x に依存せず ε だけに依存した形で N を見つけることができれば，その級数は $\mathcal{R}$ 上で $S(x)$ に**一様収束**するという．一様収束する級数は，以下の定理で示されるように重要な利点を多く持っている．

定理 1.9

$u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ が $a \leq x \leq b$ 上で連続で，$\sum u_n(x)$ が $a \leq x \leq b$ 上で $S(x)$ に一様収束するならば，$S(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続である．

定理 1.10

$\sum u_n(x)$ が $a \leq x \leq b$ で $S(x)$ に一様収束し，$u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ が $a \leq x \leq b$ で積分可能ならば,

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \{u_1(x) + u_x(x) + \cdots\}\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots.$$

定理 1.11

$u_n(x)\,(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が，$a \leq x \leq b$ 内で連続かつ連続な導関数を持ち，また，$a \leq x \leq b$ 上で，$\sum u_n(x)$ が $S(x)$ に収束し，$\sum u_n'(x)$ が一様収束するならば,

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\{u_1(x) + u_2(x) + \cdots\} = u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots.$$

一様収束するかの判定方法として，**ワイエルシュトラスの M 判定法**と呼ばれるものが重要であり，次のように与えられる．

定理 1.12

$\mathcal{R}$ 上で $|u_n(x)| \leq M_n$ となるような，正の定数 M_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ の集合が存在し，$\sum M_n$ が収束するとき，$\sum u_n(x)$ は $\mathcal{R}$ 上で一様収束する [絶対収束もする]．

テイラー級数

$f(x)$ が少なくとも n 階導関数を持つことを仮定すると，$f(x)$ の $x = a$ における**テイラー級数**は以下のように定義される．

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{n-1}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n. \tag{10}$$

ここで,

$$R_n = \frac{f^{(n)}(x_0)(x-a)^n}{n!} \qquad (x_0 \text{ は } a \text{ と } x \text{ の間の適当な数}) \tag{11}$$

を**剰余項**という．$n=1$ とした (10) は,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(x_0) \qquad (x_0 \text{ は } a \text{ と } x \text{ の間の適当な数}) \tag{12}$$

とかけ，**平均値の定理**という．(10) に対応する無限級数は，$f(x)$ の**形式的テイラー級数**といい，ある区間で $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ ならその区間で収束する．いくつかの重要なテイラー級数およびそれらの収束領域は以下の通り．

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$

2. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$

3. $\cos x = 1 - \dfrac{x^3}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$

4. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1)$

5. $\tan^{-1} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1)$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ の形の級数はしばしば**べき級数**と呼ばれる．このような級数は，収束領域内の任意の区間で一様収束する 問題 1.120(補).

多変数関数

『関数 (p.2)』の節で与えた 1 変数関数の概念は，多変数関数の場合に拡張できる．したがって，$z = f(x, y)$ は，数の組 (x, y) に数 z を与える関数 f を定義している．

例 6.

$f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2$ としたとき，$f(-1, 2) = (-1)^2 + 3(-1)(2) + 2(2)^2 = 3$

$z = f(x, y)$ のグラフを描くと，3 次元 xyz 座標系中の**曲面**が求められることを知っておくと良い．しばしば x と y は**独立変数**，z は**従属変数**と呼ばれる．時には $z = f(x, y)$ ではなく $z = z(x, y)$ と書いて記号 z を 2 つの異なる意味で使っているが，これによって混乱を招くことはないだろう．

多変数関数に対する極限や連続の考え方は，1 変数関数の極限や連続の考え方と類似している．

偏微分

$f(x,\,y)$ の x や y に関する**偏導関数** (**偏微分**) は，極限値

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,\,y)-f(x,\,y)}{h},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,\,y+k)-f(x,\,y)}{k} \tag{13}$$

と定義される（$h=\varDelta x,\,k=\varDelta y$ とかくこともある）．注目すべきは，$\partial f/\partial x$ は，「y **を一定にした** x に関する f の導関数」であり，$\partial f/\partial y$ は，「x **を一定にした** y に関する f の導関数」であるという事実にある．したがって，『微分の公式 (p.6)』の節で示した通常の微分公式を適用できる．

例 7.

$$f(x,\,y)=3x^2-4xy+2y^2 \text{ のとき，}\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=6x-4x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-4x+4y$$

より高次な導関数も同様に定義される．例えば，2 次の導関数は以下のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{14}$$

式 (13) における導関数はそれぞれ $f_x,\,f_y$ と表されることがある．そしてこれら偏導関数を $(a,\,b)$ で評価したものを $f_x(a,b),\,f_y(a,b)$ と表す[1]．同様に，式 (14) 中の導関数はそれぞれ $f_{xx},\,f_{xy},\,f_{yx},\,f_{yy}$ という具合に表す．さらに，式 (14) の 2 番目，3 番目の結果は，f が少なくとも 2 階の連続な偏導関数を持つならば，等しくなる (訳注：$f_{xy}=f_{yx}$)．

$f(x,y)$ の**全微分**は

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{15}$$

として定義される．ここで，$h=\varDelta x=dx,\,k=\varDelta y=dy$ である．

本節の結果は n 変数を持つ関数の場合に容易に一般化できる．

多変数関数のテイラー級数

1 変数関数のテイラー級数に関する考え方は一般化できる．例えば，$f(x,y)$ の $x=a,\,y=b$ でのテイラー級数は以下のように与えられる．

1）訳注：$f_x(a,b)$ は**偏微分係数**であるという．より正確にいうならば，$f_x(a,b)$ は「関数 $f(x,y)$ の (a,b) における x に関する偏微分係数である」という．

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] + \cdots \tag{16}$$

線形方程式と行列式

次の線形方程式系を考える．

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{17}$$

この系は xy 平面上の 2 つの直線を表しており，これらは一般に，(17) を同時に解くことで得られる座標 (x,y) 点で交わる．実際に求めると以下のようになる．

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \tag{18}$$

この式を**行列式**の形でかくと便利で，次のようになる．

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{19}$$

ここで，「2 **次**」**の行列式**は以下のように定義する．

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{20}$$

なお，式 (19) における x および y の分母は，式 (17) における x および y の係数からなる行列式となっていることに注目しよう．そして，x の分子は分母の行列式の一列目を式 (17) の右辺にある定数 c_1, c_2 に置き換えた行列式になっている．同様に y の分子についても分母の行列式の二列目を定数 c_1, c_2 に置き換えたものになっている．このように行列式によって解を与える公式を**クラメルの規則**という．

この考え方は簡単に拡張できる．そこで 3 つの平面からなる次の方程式を考える．

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{21}$$

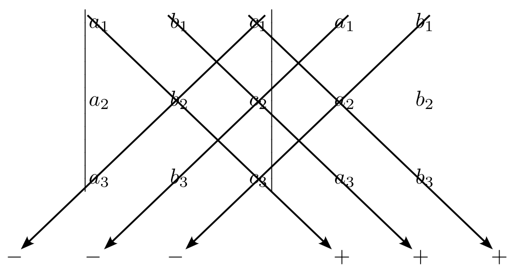
もしある点で交わるなら，この座標点 (x, y, z) はクラメルの規則より，

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \tag{22}$$

とすることで求められる．ここで,「3 次」の行列式は以下で定義される．

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - (b_1a_2c_3 + a_1c_2b_3 + c_1b_2a_3) \tag{23}$$

式 (23) の結果は，以下の式 (24) のようにして覚えればよい：最初の二列を写して横に並べ，次に，矢印がなぞる項の積をとって矢印の先端の符号である ‘+’ や ‘−’ をつける．これを全ての矢印で行いそれらの和を取る．



(24)

以下のように，3 次行列式は 2 次行列式を用いても求められる．

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \tag{25}$$

式 (25) 中の a_1, b_1, c_1 は，3 次行列式の 1 行目の要素であり，2 次行列式は，それらの要素が現れる行と列を 3 次行列式から取り除くことで得られる．

上記の行列式に関する結果のより一般的な理論については，第 15 章で詳しく学んでいく．

極大値と極小値

ある正の数 δ が存在して，$|x-a| < \delta$ ならば $f(x) \leq f(a)$[または $f(x) \geq f(a)$] が成り立つとき，$f(a)$ を**極大値** [または**極小値**] という．$f(x)$ が $x = a$ で極大値または極小値を持つなら，$f'(a) = 0$ である．そしてこのとき，$f''(a) < 0$ ならば $f(a)$ は極大値であり，$f''(a) > 0$ なら $f(a)$ は極小値となる．$f(x)$ が極大値または極小値を持つ可能性のある点は，$f'(x) = 0$ を解くことによって，すなわち，$f(x)$ のグラフの**傾き**が 0 に等しい x の値を見つけることによって得られる．

同様に，$f(x,y)$ が $x = a$, $y = b$ で極大値または極小値を持つとき，$f_x(a,b) = 0$, $f_y(a,b) = 0$ となる．したがって，$f(x,y)$ が極大値または極小値を持つ可能性のある点は，以下の方程式を解くことによって得られる．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{26}$$

上の結果は，2 変数以上の関数に対しても同様に行える．

ラグランジュの未定乗数法

目的によっては，とある制約条件 $\phi(x,y) = 0$ のもとで，$f(x,y) = 0$ の極大値または極小値を求めたいこともあるだろう．これを行うには，関数 $h(x,y) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)$ をつくり，

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \tag{27}$$

を解くことで得られる．つまり，求めたい答えはその解の中にある．定数 λ は**ラグランジュ乗数**といい，この方法を**ラグランジュの未定乗数法**という．この方法は一般化可能である $\boxed{\text{問題 1.54}}$ $\boxed{\text{問題 1.150(補)}}$.

ライプニッツの積分法則

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx \tag{28}$$

とおき，f は連続で微分可能であるとしよう．このとき，**ライプニッツの積分法則**により，a と b がともに α の関数で微分可能であれば，次が成り立つ．

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx + f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha} \tag{29}$$

多変数関数の積分

1 変数関数に関する積分の一般化は，多変数関数に関する**多重積分**の着想につながる．この理論に関わるいくつかの考え方は，まだ述べていない概念が関わってくるので，この話題は第 6 章で扱うことにする．

複素数

複素数は，$x^2 + 1 = 0$ や $x^2 + x + 1 = 0$ のような実数では満たせない多項式を解くために生じた．複素数は $a + bi$ の形をしている．ここで，a, b は実数で，**虚数単位**とよばれる i は $i^2 = -1$ の性質を持つと仮定する．複素数に関して以下の演算を定義する．

1. 和　$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

2. 差　$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

3. 積　$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

4. 商　$\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{a + bi}{c + di} \cdot \dfrac{c - di}{c - di} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

i^2 が現れる箇所では必ず -1 に置き換えることを除けば，通常の代数規則を用いていることに注目せよ．『代数の規則 (p.2)』で述べた交換法則や結合法則，分配法則は複素数に対しても適用できる．$a + bi$ の a と b をそれぞれ**実部**と**虚部**という．二つの複素数が**等しい**とは，それらの実部と虚部がそれぞれ等しい場合をいう．

複素数 $z = x + iy$ は，**複素平面** (または**アルガン図**) とよばれる直角平面座標 xy 上の，座標 (x, y) を持つ点 P として考えることができる [図 1-4]．原点 O から P までの直線を作り，距離 OP を ρ，正の x 軸と OP のなす角を ϕ とすると，図 1-4 から

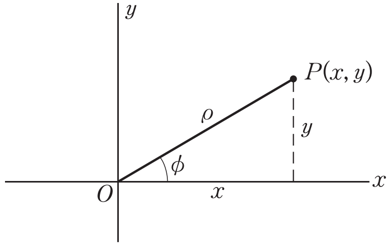


図 1-4

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{30}$$

となり，複素数をいわゆる**極形式**として

$$z = x + iy = \rho(\cos\phi + i\sin\phi) = \rho\,\mathrm{cis}\,\phi \tag{31}$$

と書くことができる．ρ は z の**絶対値**とよばれ，$|z|$ と表されることが多い．なす角 ϕ は z の**偏角**とよばれ，$\arg z$ と表される．また，$z = x + iy$ の**共役**とよばれる $\bar{z} = x - iy$ を導入することで $\rho = \sqrt{z\bar{z}}$ と書くこともできる．

もし 2 つの複素数を極形式

$$z_1 = \rho_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1), \qquad z_2 = \rho_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \tag{32}$$

と書くとき，以下が成り立つ．

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)], \tag{33}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)] \tag{34}$$

また，n が任意の整数であれば，

$$z^n = [\rho(\cos\phi + i\sin\phi)]^n = \rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) \tag{35}$$

となり，これは**ド・モアブルの定理**とよばれる．この定理を用いることで複素数の n 乗根を求めることができる．例えば，n が任意の正の整数であれば，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= [\rho(\cos\phi + i\sin\phi)]^{1/n} \\ &= \rho^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right)\right\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \tag{36}$$

さらに，『テイラー級数 (p.11)』で示した $e^x, \sin x, \cos x$ のテイラー級数を用いて，**オイラーの公式**とよばれる

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi, \qquad e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi \tag{37}$$

を定義すると，式 (31)〜式 (36) を指数関数で書き換えられる．

この章で紹介した実数に関する考え方の多くは，複素数にも応用できる．これらの考え方は第 13 章で展開していく．