演習問題

実数，代数の規則

問題 1.1　$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ.

解答

背理法で証明するため，問いの命題が偽であるとして矛盾を導く．すなわち $\sqrt{2} = p/q$ とし，p と q は 1 以外に共通の約数を持たない正の整数とする [このような p/q を**既約分数**という]．既約分数を二乗すると $2 = p^2/q^2$，そして $p^2 = 2q^2$ となる．この式より p^2 は偶数であることがわかり，p も偶数となる[2)]．したがって，$p = 2m\,(m$ は正の整数) となる．この p を $p^2 = 2q^2$ に代入すると $q^2 = 2m^2$ を得るので，q^2 は偶数となり q が偶数であることになる．すなわち，$q = 2n\,(n$ は正の整数) となる．p と q はどちらも偶数だから 2 という共通の約数を持つことなり，1 以外に共通の約数を持たないという仮定に反する．この矛盾は，$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定したことに起因しており，したがって $\sqrt{2}$ は無理数であることが証明できた.

問題 1.2　$\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ のどちらが大きいか示せ.

解答

$\sqrt{2} \geq \sqrt[3]{3}$ と仮定する．このとき，両辺を 6 乗すると $2^3 \geq 3^2$ を得るが，これは正しくない．したがって，$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ となる.

問題 1.3　実数 a, b, c が『代数の規則 (p.2)』で述べた代数の規則をすべて満足すると仮定したとき，$(b+c)a = ba + ca$ を証明せよ.

解答

『代数の規則 (p.2)』の規則 3，5 を用いる．まず，規則 5 より，$a(b+c) = ab + ac$ を得る．一方で規則 3 より，$a(b+c) = (b+c)a,\ ab = ba,\ ac = ca$ となる．したがって，$(b+c)a = ba + ca$.

---

2)　訳注：p^2 が偶数のとき，p が奇数であるとする．このとき，$p = 2k+1\,(k$ は正の整数) とかけるが，p^2 に代入すると，

$$p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

これは奇数だから p^2 が偶数だという仮定に反する．ゆえに，「p^2 が偶数なら p も偶数である」といえる.

関数

問題 1.4　$f(x) = 2x^3 - 3x + 5$ としたとき，以下を求めよ．

$$(a)\ f(-1), \qquad (b)\ f(0), \qquad (c)\ f(x+h)$$

解答

(a)　$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1) + 5 = 2(-1) + 3 + 5 = 6$

(b)　$f(0) = 2(0)^3 - 3(0) + 5 = 0 + 0 + 5 = 5$

(c)　
$$\begin{aligned} f(x+h) &= 2(x+h)^3 - 3(x+h) + 5 \\ &= 2(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 3x - 3h + 5 \\ &= 2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 3x - 3h + 5 \end{aligned}$$

問題 1.5　指数の規則である式 (1) を用いて，『関数の例 (p.3)』で述べた，対数の規則である式 (4) を導け．

解答

簡単のために底を $e = 2.7182818\ldots$ とする．定義より，$e^x = m$ のとき $x = \ln m$．同様に $e^y = n$ のとき $y = \ln n$．

- $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ だから，$mn = e^{x+y}$，$x+y = \ln(mn)$ を得る．よって $\ln(mn) = \ln m + \ln n$ が成り立つ．
- $e^x/e^y = e^{x-y}$ だから，$m/n = e^{x-y}$，$x - y = \ln(m/n)$ を得る．よって $\ln(m/n) = \ln m - \ln n$ が成り立つ．
- $(e^x)^p = e^{xp}$ だから，$m^n = e^{xp}$，$xp = \ln(m^p)$ を得る．よって $\ln(m^p) = p\ln(m)$ が成り立つ．

問題 1.6　以下を証明せよ．

$$(a)\ \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad (b)\ \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

解答

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ より $y = x$ とすると，

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x. \tag{1}$$

また，

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{2}$$

より，目的の結果 (a) と (b) は，式 (1) と式 (2) 同士を足したり引いたりして整理することでそれぞれ得られる．

問題 1.7　以下を証明せよ．

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\alpha) \qquad (\tan\alpha = A/B)$$

解答

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\right] \tag{1}$$

とする．

$$\sin\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \tan\alpha = \frac{A}{B}$$

とおくと [図 1-5 参照]，(1) は

$$\begin{aligned} A\cos x + B\sin x &= \sqrt{A^2+B^2}\,[\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x] \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\alpha) \end{aligned}$$

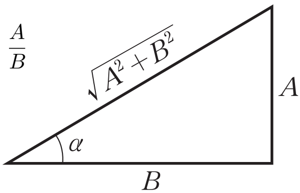

図 1-5

となり，目的の式が成り立つことがわかった．

問題 1.8　以下を証明せよ．

$$(a)\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad (b)\ \mathrm{sech}^2\, x + \tanh^2 x = 1$$

解答

(a) 定義より，$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$，$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ である．したがって，

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \tfrac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \tfrac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \tfrac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 1 \end{aligned}$$

(b) (a) の結果の両辺を $\cosh^2 x$ で割ると，

$$\frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

となる．$\sinh x/\cosh x = \tanh x$ と $1/\cosh x = \mathrm{sech}\, x$ より，$1 - \tanh^2 x = \mathrm{sech}^2\, x$ を得る．よって，$\mathrm{sech}^2\, x + \tanh^2 x = 1$ が導かれる．

問題 1.9　以下を証明せよ．

$$\cosh^{-1} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

解答

$y = \cosh^{-1} x$ ならば，定義より $x = \cosh y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$ となる．このとき，$e^y + e^{-y} = 2x$，さらに e^y をかけて整理すると $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$ を得る．この式を未知数 e^y の二次方程式とみなして解くと，

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

と求まり，y の式に直すと $y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$ となる．このうち $\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ は，

$$\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \ln\left(\frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

となるので，目的の式が導けた．この結果から，$y = \cosh^{-1} x$ が実数値となる場合は $x \geq 1$ であることに注意しよう．

極限と連続

問題 1.10　以下の関数について，$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ となることを証明せよ．

$$(a)\ \ f(x) = x^2, \qquad (b)\ \ f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

解答

(a) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在し [一般に ε に依存する]，$0 < |x - 2| < \delta$ ならば $|x^2 - 4| < \varepsilon$ が成り立つことを示す．

$0 < |x - 2| < 1$ となるように，$\delta \leq 1$ を選ぶ．すると，

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x - 2|\,|x + 2| &= |x - 2|\,|(x - 2) + 4| \\ &\leq |x - 2|\,\{|x - 2| + 4\} < 5\delta \end{aligned}$$

上の式変形では，$|a + b| \leq |a| + |b|$ を用いている[3]．

3)　訳注：$\delta \leq 1$ はすなわち $\delta^2 \leq \delta$ であるから，$|x - 2|\,\{|x - 2| + 4\} < \delta^2 + 4\delta \leq \delta + 4\delta = 5\delta$ を得る．

δ を 1 か $\varepsilon/5$ のうちの小さい方とする [訳注：$\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$]．すると，$|x-2| < \delta$ ならば $|x^2-4| < \varepsilon$ となるから，題意が示された．
(b) (a) では $x=2$ を使って議論していないので，(b) に与える証明も (a) と同じになる．

問題 1.11　$\lim_{x\to a} f_1(x) = l_1$ と $\lim_{x\to a} f_2(x) = l_2$ が成り立つと仮定したとき，以下を証明せよ．

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) + f_2(x)] = l_1 + l_2$$

解答

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在し，

$$0 < |x-a| < \delta \quad \text{ならば} \quad |\,[f_1(x) + f_2(x)] - (l_1 + l_2)\,| < \varepsilon$$

が成り立つことを示す．
右の不等式は

$$\begin{aligned} |\,[f_1(x) + f_2(x)] - (l_1 + l_2)\,| &= |\,[f_1(x) - l_1] + [f_2(x) - l_2]\,| \\ &\leq |f_1(x) - l_1| + |f_2(x) - l_2| \end{aligned} \tag{1}$$

のように変形できる．仮定より，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta_1 > 0$ とある $\delta_2 > 0$ が存在して，以下が成り立つことがわかる[4)]．

$$0 < |x-a| < \delta_1 \quad \text{ならば} \quad |f_1(x) - l_1| < \varepsilon/2 \tag{2}$$

$$0 < |x-a| < \delta_2 \quad \text{ならば} \quad |f_2(x) - l_2| < \varepsilon/2 \tag{3}$$

したがって，式 (1) と式 (2)，式 (3) より，δ_1 と δ_2 のうちの小さい方を δ とすると，

$$0 < |x-a| < \delta \quad \text{ならば} \quad |\,[f_1(x) + f_2(x)] - (l_1 + l_2)\,| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

が成り立つ．
同じようなやり方で，以下のような極限に関する定理を証明できる 問題 1.75(補)．

$\lim_{x\to a}[f_1(x) - f_2(x)] = l_1 - l_2$，　$\lim_{x\to a}[f_1(x)f_2(x)] = l_1 l_2$，　$\lim_{x\to a} f_1(x)/f_2(x) = l_1/l_2\ (l_2 \neq 0)$．

問題 1.12　以下を証明せよ．

(a) $f(x) = x^2$ は $x=2$ で連続．　(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \neq 2) \\ 0 & (x = 2) \end{cases}$ は $x=2$ で**不**連続．

4)　訳注：ε は正の数であれば良いので，$\varepsilon/2(=\varepsilon_0)$ としても問題ない．

解答

(a) **方法 1.**

問題 1.10(a) より，$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4$ だから，$f(x)$ は $x = 2$ で連続である．

方法 2.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在し [一般に ε に依存する]，$|x-2| < \delta$ ならば $|f(x) - f(2)| = |x^2 - 4| < \varepsilon$ が成り立つことを示す．この証明は問題 1.10 で与えている．

(b) $f(2) = 0$ なので $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$ となる．ゆえに $f(x)$ は $x = 2$ で連続でない [または不連続]．また，ε と δ を用いた証明も与えることができる．その場合，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$|x-2| < \delta$ ならば $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ となるような $\delta > 0$ を見つけることができないことを示すことで証明できる．

微分

問題 1.13　u と v は微分可能でともに x の関数であるとしたとき．以下を証明せよ．

$$(a)\quad \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}, \qquad (b)\quad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

解答

(a) $\Delta u = u(x+h) - u(x)$，$\Delta v = v(x+h) - v(x)$ とおく．また，$u(x)$ と $v(x)$ をそれぞれ簡単に u と v で表す．このとき定義より，$h = \Delta x$ としたならば，以下を得る．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(u+v) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - [u(x) + v(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle \lim_{\Delta x\to 0} \Delta v \frac{\Delta u}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta x\to 0} \Delta v\right) \frac{du}{dx} = 0$ だから，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta v\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

問題 1.14　$f(x)$ が点 a で微分可能ならば，$f(x)$ は a で連続であることを証明せよ．

解答

$h \neq 0$ ならば $f(a+h)-f(a)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h$ を得る．このとき，微分可能なら

$$\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]\cdot\lim_{h\to 0}h=0$$

を得る．したがって，$\displaystyle\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$ となり，目的の結果が導けた．

問題 1.15　p が正の整数，u が微分可能な x の関数であるとき，以下を証明せよ．

$$\frac{d}{dx}u^p=pu^{p-1}\frac{du}{dx}$$

解答

定義より，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}u^p&=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)]^p-[u(x)]^p}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)^p-u^p}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u^p+pu^{p-1}\Delta u+\frac{1}{2}p(p-1)u^{p-2}(\Delta u)^2+\cdots-u^p}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[pu^{p-1}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\tfrac{1}{2}p(p-1)u^{p-2}\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta u+\cdots\right]=pu^{p-1}\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

となるので題意が示せた．この結果は，あらゆる p に対しても成り立つことが示せる．

問題 1.16　$\displaystyle\lim_{b\to 0}\frac{\sin b}{b}=1$ を仮定したとき，以下を証明せよ．

(a) $\dfrac{d}{dx}\sin u=\cos u\dfrac{du}{dx}$,　(b) $\dfrac{d}{dx}\cos u=-\sin u\dfrac{du}{dx}$,　(c) $\dfrac{d}{dx}\tan u=\sec^2 u\dfrac{du}{dx}$

解答

(a) 問題 1.6(a) の結果を使う．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin u&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin u(x+h)-\sin u(x)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(u+\Delta u)-\sin u}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin u\cos\Delta u+\cos u\sin\Delta u-\sin u}{\Delta x}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos u\frac{\sin\Delta u}{\Delta x} - \sin u\left(\frac{1-\cos\Delta u}{\Delta x}\right)\right] \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos u\frac{\sin\Delta u}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\sin u}{2}\left(\frac{\sin^2(\Delta u/2)}{(\Delta u/2)^2}\right)\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta u\right] \\
&= \cos u\frac{du}{dx}.
\end{aligned}
$$

(b) (a) より，$\dfrac{d}{dx}\sin v = \cos v\dfrac{dv}{dx}$ であることがわかっている．

このとき $v = \dfrac{\pi}{2} - u$ とおくと，$\sin v = \cos u$ であるので，

$$
\frac{d}{dx}\cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = -\sin u\frac{du}{dx}
$$

と求められる．

(c) 『微分の公式 (p.6)』の公式 4 より，以下を得る．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan u = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin u}{\cos u}\right) &= \frac{(\cos u)\dfrac{d}{dx}\sin u - (\sin u)\dfrac{d}{dx}\cos u}{\cos^2 u} \\
&= \frac{(\cos u)(\cos u)\dfrac{du}{dx} - (\sin u)(-\sin u)\dfrac{du}{dx}}{\cos^2 u} \\
&= \frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u}\frac{du}{dx} = \sec^2 u\frac{du}{dx}
\end{aligned}
$$

問題 1.17　以下を証明せよ．

$$
\frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}
$$

解答

$v = \tan^{-1} u$ なら $u = \tan v$ である．このとき，問題 1.16(c) より，

$$
\frac{du}{dx} = \sec^2 v\frac{dv}{dx} = (1+\tan^2 v)\frac{dv}{dx} = (1+u^2)\frac{dv}{dx}
$$

ゆえに，

$$
\frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}
$$

問題 1.18　$\lim_{b\to 0}(1+b)^{1/b} = e = 2.7182818\ldots$ を仮定したとき，以下を証明せよ．

$$(a)\ \frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad (b)\ \frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

解答

$$(a)\frac{d}{dx}\ln u = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\ln(u+\Delta u)-\ln u}{\Delta x}\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{u}{\Delta u}\left[\ln\left(\frac{u+\Delta u}{u}\right)\right]\frac{\Delta u}{u\Delta x}\right\}$$

$$= \frac{1}{u}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}\right]\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\ln e\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

ここでは，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u} = \ln\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}\right]$$

を仮定しているが，これは $\ln u$ が連続関数であると示すことで証明できる．

(b) $v = e^u$ ならば $u = \ln v$ となる．このとき，(a) より，

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} \qquad \text{または} \qquad \frac{dv}{dx} = v\frac{du}{dx}$$

すなわち，

$$\frac{1}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$$

となる．

問題 1.19　以下を求めよ．

$$(a)\ \frac{d}{dx}\sqrt{x^4+2x}, \qquad (b)\ \frac{d}{dx}\sin(\ln x)\ , \qquad (c)\ \frac{d}{dx}\ln(e^{3x}+\cos 2x)$$

解答

$$(a)\ \frac{d}{dx}\sqrt{x^4+2x} = \frac{d}{dx}(x^4+2x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^4+2x)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x^4+2x)$$

$$= \frac{1}{2}(x^4+2x)^{-\frac{1}{2}}(4x^3+2) = (x^4+2x)^{-\frac{1}{2}}(2x^3+1)$$

$$(b)\ \frac{d}{dx}\sin(\ln x) = \cos(\ln x)\frac{d}{dx}\ln x = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

$$(c)\quad \frac{d}{dx}\ln(e^{3x}+\cos 2x) = \frac{1}{e^{3x}+\cos 2x}\frac{d}{dx}(e^{3x}+\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{e^{3x}+\cos 2x}\left[e^{3x}\frac{d}{dx}(3x) - \sin 2x\frac{d}{dx}(2x)\right] = \frac{3e^{3x}-2\sin 2x}{e^{3x}+\cos 2x}$$

問題 1.20　$x^2y - e^{2x} = \sin y$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

解答

y を x の関数として考え，両辺が x で微分可能であるとしよう．このとき，

$$\frac{d}{dx}(x^2y) - \frac{d}{dx}(e^{2x}) = \frac{d}{dx}\sin y$$

より，

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - 2e^{2x} = \cos y\frac{dy}{dx}$$

と求まる．これを整理すると，

$$(x^2-\cos y)\frac{dy}{dx} = 2e^{2x} - 2xy.$$

したがって，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2x}-2xy}{x^2-\cos y}$$

が得られる．

問題 1.21　$y = 3x^2 + \sin 2x$ のとき，以下が成り立つことを示せ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 12x^2 + 6$$

解答

$$y = 3x^2 + \sin 2x, \qquad \frac{dy}{dx} = 6x + 2\cos 2x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 6 - 4\sin 2x$$

だから，

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = (6-4\sin 2x) + 4(3x^2+\sin 2x) = 12x^2 + 6$$

問題 1.22　以下のそれぞれについて，全微分 dy を求めよ．

$$(a)\quad y = x^2 - \ln x, \qquad (b)\quad y = e^{-2x} + \cos 3x$$

解答

$(a)\ \ dy = \dfrac{dy}{dx}dx = \dfrac{d}{dx}(x^2 - \ln x)dx = \left(2x - \dfrac{1}{x}\right)dx$

$(b)\ \ dy = \dfrac{dy}{dx}dx = \dfrac{d}{dx}(e^{-ex} + \cos 3x) = -(2e^{-2x} + 3\sin 3x)dx$

積分

問題 1.23　以下を証明せよ．ただし，積分の定数は省略している．

$$(a)\ \int u^p\, du = \frac{u^{p+1}}{p+1}\ (p \neq -1) \qquad (b)\ \int \frac{du}{u} = \ln u$$

$$(c)\ \int (u+v)dx = \int udx + \int vdx \qquad (d)\ \int \cos udu = \sin u$$

解答

(a) $p \neq -1$ なら，$\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{u^{p+1}}{p+1}\right) = \dfrac{(p+1)u^p}{p+1} = u^p$ より，$\displaystyle\int u^p\, du = \frac{u^{p+1}}{p+1}\ \ (p \neq -1)$.

(b) $\dfrac{d}{du}\ln u = \dfrac{1}{u}$ より，$\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln u$.

(c) $F = \displaystyle\int (u{+}v)\, dx$，$G = \displaystyle\int u\, dx$，$H = \displaystyle\int v\, dx$ とおくと，定義より，$\dfrac{dF}{dx} = u{+}v$，$\dfrac{dG}{dx} = u$，$\dfrac{dH}{dx} = v$.

したがって，$\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{dG}{dx} + \dfrac{dH}{dx} = \dfrac{d}{dx}(G+H)$ となり，積分定数を除いて $F = G + H$ が成り立つ．

(d) $\dfrac{d}{du}\sin u = \cos u$ だから，$\displaystyle\int \cos u\, du = \sin u$ を得る．

問題 1.24　以下を求めよ．

$$(a)\int x\sqrt{x^2+1}, dx \qquad (b)\int e^{3x}\cos(e^{3x})\, dx \qquad (c)\int \frac{1-\cos x}{x-\sin x}\, dx$$

解答

(a) $u = x^2 + 1$ とおくと，$du = 2x\, dx$ となる．したがって，

$$\int x\sqrt{x^2+1}\, dx = \int \sqrt{u}\, \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{u^{3/2}}{3} + c = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3} + c$$

(b) $u = e^{3x}$ とおくと，$du = 3e^{3x}\,dx$ となる．したがって，

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\cos(e^{3x})\,dx &= \int \cos u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \cos u\,du \\ &= \frac{1}{3}\sin u + c = \frac{1}{3}\sin(e^{3x}) + c\end{aligned}$$

(c)　$u = x - \sin x$ とおくと，$du = (1-\cos x)\,dx$ となる．したがって，

$$\int \frac{1-\cos x}{x-\sin x}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln(x - \sin x) + c$$

問題 1.25　以下に答えよ．

(a) 部分積分（『積分の公式 (p.8)』の公式 3）を証明せよ．

(b) 部分積分を用いて，$\int x\sin 2x\,dx$ を求めよ．

解答

(a)　$d(uv) = u\,dv + v\,du$ だから，

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,dv \qquad \text{または} \qquad uv = \int u\,dv + \int v\,du.$$

これを整理すると，$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ を得る．

(b)　$u = x, dv = \sin 2x\,dx$ としよう．このとき，$du = dx$，$v = -\frac{1}{2}\cos 2x$ となる．したがって，部分積分を適用すると，

$$\int x\sin 2x\,dx = (x)(-\tfrac{1}{2}\cos 2x) - \int(-\tfrac{1}{2}\cos 2x)\,dx = -\tfrac{1}{2}x\cos 2x + \tfrac{1}{4}\sin 2x + c.$$

問題 1.26　以下を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,dx}{x^2+1}$　　　(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos 3x\,dx$

解答

(a)　$u = x^2 + 1$ とおくと，$du = 2x\,dx$ となる．ゆえに，

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

となる．したがって，

$$\int_1^2 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c\right]_1^2 = \left(\frac{1}{2}\ln 5+c\right)-\left(\frac{1}{2}\ln 2+c\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

(b) $u=3x$ とおくと，$du=3\,dx$ となる．ゆえに，

$$\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \cos u\,du = \frac{1}{3}\sin u + c = \frac{1}{3}\sin 3x + c$$

となる．したがって，

$$\int_0^{\pi/2} \cos 3x\,dx = \left[\frac{1}{3}\sin 3x + c\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}.$$

定積分を求める際は積分定数 c を省略しているが，これはどのみち定数部分が消えるためである．

問題 1.27　曲線 $y = \sin x$ に対して，$x = 0$ から $x = \pi$ までの面積を求めよ [図 1-2(p.4)].

解答

$$\text{面積} = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2.$$

問題 1.28　以下に答えよ．

(a) 『積分の公式 (p.8)』の定積分に関する定義式 (8) を用いて，$\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}$ の近似値を求め，幾何学的な解釈を述べよ．

(b) (a) の結果は近似値であるが，この結果を用いてより精度の高い値に改善できる．どのように改善できるかを示せ．

解答

(a) $a=1, b=2$ とし，長さ $b-a=1$ の a から b までの区間を $n = 10$, $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{10} = .1$ となるように 10 等分する [図 1-6]．このとき，値はおおよそ以下のように求まる．

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = .1\,[f(1)+f(1.1)+f(1.2)+\cdots+f(1.9)]$$

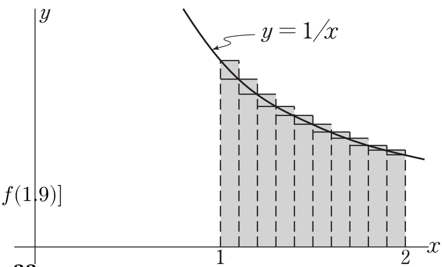

図 1-6

$$
\begin{aligned}
&= .1\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.9}\right] \\
&= .1\,[1.0000+.9091+.8333+.7692+.7143 \\
&\qquad\qquad + .6667+.6250+.5882+.5556+.5263] \\
&= .7188
\end{aligned}
$$

実際の正しい値は $\ln a - \ln b = \ln a = .6932$ である．なお，近似式の和の各項は，図 1-6 中の点線で囲まれた 10 個の長方形の面積のうちの 1 つを表している．

(b) (a) で得られた結果は，点線で囲まれた各長方形の上辺が曲線 $y = 1/x$ の上にあるため，値を**高く**見積もってしまっている．そこで，**低く**見積もるために，高さが曲線より低い長方形を用いることにする．この方法で値を見積もると，

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{dx}{x} &= .1\,[f(1.1)+f(1.2)+f(1.3)+\cdots+f(2.0)] \\
&= .1\left[\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.3}+\cdots+\frac{1}{2.0}\right] \\
&= .1\,[.9091+.8333+.7692+.7143+.6667+.6250+.5882+.5556+.5263+.5000] \\
&= .6688
\end{aligned}
$$

が得られる．より良い積分の推定値として，過大近似値と過小近似値の算術平均，すなわち $\frac{1}{2}(.7188 + .6688) = .6938$ は，正しい値 .6932 と非常に近い値である．二つの長方形の面積の算術平均が台形の面積になるので，この平均による方法は**台形公式**と呼ばれる．

数列と級数

問題 1.29　以下に答えよ．

(a) 数列 .3, .33, .333, ... の極限値を求めよ．

(b) (a) で求めた極限値が正しいことを『数列と級数 (p.9)』で述べた収束の定義を使って証明せよ．

解答

(a) 数列の n 番目の項は以下のようにかける．

$$u_n = \frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{3}{10^n} = \frac{3}{10}\left[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}\right]$$

ここで，もし

$$S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}$$

なら

$$\frac{1}{10}S = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^n}$$

なので，これらの差をとると，

$$\frac{9}{10}S = 1 - \frac{1}{10^n} \quad \text{または} \quad S = \frac{10}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

したがって，n 番目の項は $u_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{10^n}\right)$ となり，$n \to \infty$ とすれば，$u_n \to \dfrac{1}{3}$ が成り立つ．

(b) 1/3 が実際の所望の極限値だと証明するためには，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある N が決まり [ε に依存する]，$n > N$ ならば $\left|u_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ が成り立つことを示す必要がある．ここで，

$$\left|u_n - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{3 \cdot 10^n}\right| = \frac{1}{3 \cdot 10^n} < \varepsilon$$

となるが，$10^n > 1/3\varepsilon$，すなわち $n > \log_{10}(1/3\varepsilon) = N$ と N を定めることにより目的の命題が成り立ち，1/3 が極限値であることが証明できた．

問題 1.30　級数 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ が収束しないことを示せ．

解答

部分和数列は $1, 1-1, 1-1+1, 1-1+1-1, \ldots$，つまり，$1, 0, 1, 0, \ldots$ である．この数列は収束しないから，与えられた級数は収束しないことがわかる．

問題 1.31

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ について，『積分判定法 (p.10)』を用いて以下を示せ．

(a) $p > 1$ なら収束する．

(b) $p \leq 1$ なら発散する．

解答

(a) $f(n) = 1/n^p$ から $f(x) = 1/x^p$ を得る．$p \neq 1$ なので，

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{M \to \infty} \int_1^M x^{-p}\,dx = \lim_{M \to \infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^M = \lim_{M \to \infty} \left[\frac{M^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right]$$

となる．$p > 1$ ならこの極限値は存在するので，対応する級数は収束する．
(b) $p < 1$ なら，極限値は存在しないので級数は発散する．$p = 1$ の場合は，

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty}[\ln x]_1^M = \lim_{M\to\infty}\ln M$$

となるので極限値は存在しない．よって $p = 1$ のとき，対応する級数は発散する．

これは，n 番目の項が 0 に近づいても、$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ が発散することを示している [定理 1.7 参照 (p.10)]．

問題 1.32

$1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} - \cdots$ が収束するかどうか調べよ．

解答

絶対値級数は $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots$ であり，問題 1.31 よりこの級数は $p = 2$ なので収束することがわかる．したがって，与えられた級数は絶対収束するので，定理 1.4(p.9) により収束する．

問題 1.33

級数 $\dfrac{x}{1^2} - \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^3}{3^2} - \dfrac{x^4}{4^2} + \cdots$ は $-1 \le x \le 1$ において収束することを証明せよ．

解答

級数の n 番目の項は $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n^2}$ とかける．ここで，収束判定法を用いると，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{n+1}/(n+1)^2}{(-1)^{n-1}x^n/n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right||x| = |x|$$

となる．したがってこの級数は，定理 1.8(p.10) より，$|x| < 1$ であれば，すなわち $-1 < x < 1$ なら収束し，$|x| > 1$ であれば発散する．一方，$|x| = 1$ の場合，つまり $x = \pm 1$ のときは結論を出すことができない．ただし今回の場合，$x = 1, -1$ とした級数は

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots, \qquad \frac{-1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \cdots$$

となり，これらの級数は絶対収束することがわかるので結局は収束すると結論できる．
以上より，与えられた級数は $-1 \le x \le 1$ で収束することが証明できた．

一様収束

問題 1.34　以下の式は，$-1 \le x \le 1$ において一様収束するか，確かめよ．

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \cdots$$

解答

方法 1. $S_n(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} + \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots + \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ とおく．

$x = 0$ のとき，$S_n(0) = 0$ となる．

$x \ne 0$ のときは，この級数が等比級数であるという事実から，$S_n(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ と求められる 問題 1.110(a)(補).

以上から，

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 1 & (x \ne 0) \end{cases} .$$

級数の各項は連続だが，関数項級数の和 $S(x)$ は $x = 0$ で不連続である．したがって，定理 1.9(p.10) より，与えられた級数は $-1 \le x \le 1$ で一様収束しないことがわかる[5)]．

方法 2. 方法 1 の結果から

$$|S_n(x) - S(x)| = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x^2)^n} & (x \ne 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

を得る．このとき，$(1+x)^n > 1/\varepsilon$ から $n > \dfrac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1+x^2)} = N$ となるように N を選ぶと，$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ が成り立つ．しかしながら，$-1 \le x \le 1$ のすべてで成り立つような N を選ぶことができないので [試しに $x = 0$ のときを考えるとよい]，与えられた級数は $-1 \le x \le 1$ で一様収束しない．

5） 訳注：定理 1.9 の (論理的同値となる) 対偶命題を用いていることに注意．例えば，命題「p ならば q」の対偶命題は「$\neg q$ ならば $\neg p$」である（$\neg p$ は p の否定を表す）．定理 1.9 の対偶命題を言葉で表すと「$S(x)$ は $a \le x \le b$ で連続でないならば，$u_n(x)\,(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が $a \le x \le b$ で連続でないか，もしくは $\sum u_n(x)$ が $a \le x \le b$ 上で $S(x)$ に一様収束しないかのどちらかである」となる．さらにいえば，今回与えられている $u_n(x)\,(n = 1, 2, 3, \ldots)$ は $a \le x \le b$ で連続であるから，$\sum u_n(x)$ が $a \le x \le b$ 上で $S(x)$ に一様収束しないことが言える．

問題 1.35　定理 1.9 (p.10) を証明せよ．

解答

$S(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続であることを示す必要がある．

$S(x) = S_n(x) + R_n(x)$ とおくと，$S(x+h) = S_n(x+h) + R_n(x+h)$ だから，

$$S(x+h) - S(x) = S_n(x+h) - S_n(x) + R_n(x+h) - R_n(x) \tag{1}$$

と表せる．ここで，h は，x および $x+h$ が $a \leq x \leq b$ 内に収まるように選ばれる [例えば $x = b$ ならば，$h < 0$ が要求される]．

$S_n(x)$ は有限個の連続関数の和であるから，連続である．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある δ が決まって，

$$|h| < \delta \quad \text{ならば} \quad |S_n(x+h) - S_n(x)| < \varepsilon/3 \tag{2}$$

が成り立つ．仮定より，$S_n(x)$ は一様収束するので，以下を満たすように N を選ぶことができる．

$$n > N \quad \text{ならば} \quad |R_n(x)| < \varepsilon/3 \quad \text{かつ} \quad |R_n(x+h)| < \varepsilon/3 \tag{3}$$

したがって，式 (1) と (2)，(3) より，$|h| < \delta$ に対して，

$$|S(x+h) - S(x)| \leq |S_n(x+h) - S_n(x)| + |R_n(x+h)| + |R_n(x)| < \varepsilon$$

が成り立つので，$S(x)$ の連続性が示せた．

問題 1.36　定理 1.10 (p.11) を証明せよ．

解答

関数が $a \leq x \leq b$ で連続であれば，その範囲で積分可能である．このとき，$S(x)$ および $S_n(x)$，$R_n(x)$ は連続で，

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b S_n(x)\,dx + \int_a^b R_n(x)\,dx$$

となる．定理を証明するには，

$$\left|\int_a^b S(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b R_n(x)\,dx\right|$$

の量が，十分大きな n を選ぶことで一様に小さくなることを示さなければならない．しかし，級数 $S_n(x)$ は $S(x)$ に一様収束するという仮定より，$[a, b]$ において x に依存しな

い $n > N$ に対して $|R_n(x)| < \varepsilon/(b-a)$ とすることができるので,

$$\left|\int_a^b R_n(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |R_n(x)|\,dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon$$

となり定理が成り立つことを示せた．すなわち，この事実は,

$$\int_a^b S(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,dx \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b \left\{\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right\} dx$$

であることと同値である.

問題 1.37　ワイエルシュトラスの M 判定法を証明せよ [定理 1.12 (p.11)].

解答

$\sum M_n$ は収束するから，任意の ε に対してある N が決まって,

$$n > N \qquad \text{ならば} \qquad M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots < \varepsilon$$

が成り立つ．このとき,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots| &\leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots \\ &\leq M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots < \varepsilon \end{aligned}$$

となる．N は x とは無関係だから，級数は一様収束すると言える.

問題 1.38　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ は $-\pi \leq x \leq \pi$ で一様収束することを証明せよ.

解答

$\left|\dfrac{\sin nx}{n^3}\right| \leq \dfrac{1}{n^3}$ であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ は収束する．このことから，ワイエルシュトラスの M 判定法より，与えられた級数は $-\pi \leq x \leq \pi$ で一様収束することがわかる [実際は任意の区間で一様収束する].

テイラー級数

問題 1.39　$x = 0$ における $\sin x$ の形式的テイラー級数を求めよ.

解答

$f(x)=\sin x$ とおく．このとき，

$$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,\ f^{(4)}(x)=\sin x,\ f^{(5)}(x)=\cos x,\ldots$$

だから，

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{(4)}(0)=0,\ f^{(5)}(0)=1,\ldots$$

となる．したがって，

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!}+\cdots$$

となり，$a=0$ とすると，

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

を得る．

問題 1.40　テイラー級数法を用いて $\displaystyle\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ の近似値を求めよ．

解答

『テイラー級数 (p.11)』の e^x に関する展開で，x を $-x$ と置き換えると，

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

を得る．したがって，

$$\frac{1-e^{-x}}{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}-\frac{x^3}{4!}+\cdots$$

となる．この級数は $0\le x\le 1$ で一様収束するので 問題 1.120(補)，項ごとに積分を求めることができる．

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}dx&=\left[x-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^3}{3\cdot 3!}-\frac{x^4}{4\cdot 4!}+\cdots\right]_0^1\\&=1-\frac{1}{2\cdot 2!}+\frac{1}{3\cdot 3!}-\frac{1}{4\cdot 4!}+\cdots\\&=\text{約}\ .7966\end{aligned}$$

多変数関数と偏微分

問題 1.41　$f(x,\,y) = 3x^2 + 4xy - 2y^2$ のとき，以下を求めよ．

$$(a)\ f(2,\,-3),\quad (b)\ f_x(2,\,-3),\quad (c)\ f_y(2,\,-3),\quad (d)\ f_{xx}(2,\,-3),$$
$$(e)\ f_{xy}(2,\,-3),\quad (f)\ f_{yx}(2,\,-3),\quad (g)\ f_{yy}(2,\,-3)$$

解答

(a) $f(2,\,-3) = 3(2)^2 + 4(2)(-3) - 2(-3)^2 = -30$

(b) $f_x(x,\,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x + 4y$ だから，$f_x(2,\,-3) = 6(2) + 4(-3) = 0$

(c) $f_y(x,\,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y$ だから，$f_y(2,\,-3) = 4(2) - 4(-3) = 20$

(d) $f_{xx}(x,\,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(6x + 4y) = 6$ だから，$f_{xx}(2,\,-3) = 6$

(e) $f_{xy}(x,\,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(4x - 4y) = 4$ だから，$f_{xy}(2,\,-3) = 4$

(f) $f_{yx}(x,\,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}(6x + 4y) = 4$ だから，$f_{yx}(2,\,-3) = 4$

(g) $f_{yy}(x,\,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}(4x - 4y) = -4$ だから，$f_{yy}(2,\,-3) = -4$

なお，(e) と (f) の結果は $f_{xy} = f_{yx}$ であるという事実を示している．この関係式は f が連続で，2 階までのすべての偏導関数を持ち，かつこれらの偏導関数がすべて連続のとき成り立つ．

問題 1.42　$f(x,\,y) = \sin(x^2 + 2y)$ のとき，以下を求めよ．

$$(a)\ f_x,\quad (b)\ f_y,\quad (c)\ f_{xx},\quad (d)\ f_{xy},\quad (e)\ f_{yx},\quad (f)\ f_{yy}$$

解答

(a)　$f_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\sin(x^2 + 2y) = \cos(x^2 + 2y)\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2y) = 2x\cos(x^2 + 2y)$

(b)　$f_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\sin(x^2 + 2y) = \cos(x^2 + 2y)\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2y) = 2\cos(x^2 + 2y)$

(c)　$f_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}f_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[2x\cos(x^2 + 2y)\right]$

$$= 2x\frac{\partial}{\partial x}\cos(x^2+2y) + \cos(x^2+2y)\frac{\partial}{\partial x}(2x)$$
$$= 2x\left[-\sin(x^2+2y)\frac{\partial(x^2+2y)}{\partial x}\right] + 2\cos(x^2+2y)$$
$$= -4x^2\sin(x^2+2y) + 2\cos(x^2+2y)$$

(d) $f_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial x}f_y = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[2\cos(x^2+2y)\right]$
$$= -2\sin(x^2+2y)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+2y) = -4x\sin(x^2+2y)$$

(e) $f_{yx} = \dfrac{\partial}{\partial y}f_x = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[2x\cos(x^2+2y)\right] = 2x\dfrac{\partial}{\partial y}\cos(x^2+2y)$
$$= 2x\left[-\sin(x^2+2y)\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2y)\right] = -4x\sin(x^2+2y)$$

(f) $f_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial y}f_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[2\cos(x^2+2y)\right] = -2\sin(x^2+2y)\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+2y) = -4\sin(x^2+2y)$

(d) と (e) において $f_{xy} = f_{yx}$ となることに注目せよ．

問題 1.43　$f(x, y) = 3x^2 + 4xy - 2y^2$ のとき，全微分 df を求めよ．

解答

方法 1.　$df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy = (6x+4y)dx + (4x-4y)dy$

方法 2.　$df = d(3x^2) + d(4xy) + d(-2y^2)$
$$= 6x\,dx + 4(x\,dy + y\,dx) - 4y\,dy = (6x+4x)\,dx + (4x-4y)\,dy$$

問題 1.44　$z = f(y/x)$ のとき，$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ を示せ．

解答

方法 1.

$u = y/x$ とおくと，$z = f(u)$ となる．このとき，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)\frac{\partial}{\partial x}(y/x) = -\frac{yf'(u)}{x^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)\frac{\partial}{\partial y}(y/x) = \frac{f'(u)}{x}$$

したがって，

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left[-\frac{yf'(u)}{x^2}\right]+y\left[\frac{f'(u)}{x}\right]=0$$

方法 2.

$$dz=f'(y/x)\,d(y/x)=f'(y/x)\left[\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}\right]$$

とする．このとき $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}\,dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}\,dy$ より，$dx,\,dy$ の係数を比較すると，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yf'(y/x)}{x^2},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f'(y/x)}{x}$$

となり，方法 1 で示した同様の結果が得られる．

問題 1.45　$dz=M(x,\,y)dx+N(x,\,y)dy$ のとき，$\partial M/\partial y=\partial N/\partial x$ を証明せよ．ここで，M と N は連続な偏導関数を持つと仮定する．

解答

$dz=(\partial z/\partial x)dx+(\partial z/\partial y)dy=M\,dx+N\,dy$ より，x と y は独立変数であるから $\partial z/\partial x=M$，$\partial z/\partial y=N$ としなければならない．

このとき $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ [これらの偏導関数が連続であることによる] が成り立つから，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\quad \text{または}\quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

を得る．同様に，$\partial M/\partial y=\partial N/\partial x$ であれば，$M\,dx+N\,dy$ を，**完全微分**と呼ばれる，z の微分である dz としてかけることが証明できる．

問題 1.46　$u=u(x,\,y)$，$v=v(x,\,y)$ とし，$z=z(u,\,v)$ を考えたとき，以下を証明せよ．

$$(a)\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\qquad (b)\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

解答

$z=z(u,\,v)$，$u=u(x,\,y)$，$v=v(x,\,y)$ より，

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}\,du+\frac{\partial z}{\partial v}\,dv\cdots(1)\qquad du=\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u}{\partial y}\,dy\cdots(2)\quad dv=\frac{\partial v}{\partial x}\,dx+\frac{\partial v}{\partial y}\,dy\cdots(3)$$

を得る．このとき (2) と (3) を (1) に代入し，項を組み合わせると

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy \tag{4}$$

と求めることができる．ここで，u, v が x と y の関数だから，z を x と y の関数として考えると，

$$dz = (\partial z/\partial x)\,dx + (\partial z/\partial y)\,dy \tag{5}$$

でなければならない．そして式 (4) と (5) 中の dx と dy に対応する係数を比較すると，目的の結果が得られる．

多変数関数のテイラー級数

> **問題 1.47**　問題 1.41 の関数について，p.13 の (16) で示したテイラー級数を求めよ．

解答

問題 1.41 より，$f(2,-3)=-30$，$f_x(2,-3)=0$，$f_y(2,-3)=20$，$f_{xx}(2,-3)=6$，$f_{xy}(2,-3)=f_{yx}(2,-3)=4$，$f_{yy}(2,-3)=-4$ である．また，これらより高次の微分は 0 という事実に注意する．するとテイラー級数は，

$$3x^2+4xy-2y^2=-30+0(x-2)+20(y+3)+\frac{1}{2!}\left[6(x-2)^2+8(x-2)(y+3)-4(y+3)^2\right]$$

となる．ここで，右辺は

$$-30+20y+60+3(x^2-4x+4)+4(xy-2y+3x-6)-2(y^2+6y+9)=3x^2+4xy-2y^2$$

と求まり，結果の妥当性を確かめることができた．

線形方程式と行列式

> **問題 1.48**　p.14 で示した，式 (17) の解が式 (18) で与えられることを示せ．

解答

$$(1)\ a_1x+b_1y=c_1, \qquad (2)\ a_2x+b_2y=c_2$$

より，(1) に b_2 をかけて，$a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2$，(2) に b_1 をかけて，$b_1a_2x+b_1b_2y=b_1c_2$ を得る．

これらの引くことで，$(a_1b_2-b_1a_2)x=c_1b_2-b_1c_2$ となり，x についての結果が与えられる．同様に (1) に a_2，(2) に a_1 をかけて得られた式を引くことで y についての結果が得られる．

問題 1.49　行列式を用いて以下の方程式を解け.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 2x - 5y = 8 \end{cases}$$

解答

クラメルの規則より,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{(6)(-5) - (4)(8)}{(3)(-5) - (4)(2)} = \frac{62}{23} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(8) - (6)(2)}{(3)(-5) - (4)(2)} = -\frac{12}{23}$$

を得る．これらの結果が解かどうか，実際に方程式に代入することで確かめられる.

問題 1.50　以下の式を z について解け.

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -2 \\ x - 2y + 3z = 9 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

解答

クラメルの規則を使って求められる.

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 9 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-84}{-42} = 2$$

問題 1.51
(a) 以下の方程式系が自明な解 $x = 0,\ y = 0$ 以外の解を持つためには，k はどのような値になるべきか答えよ．

$$\begin{cases} (1-k)x + y = 0 \\ kx - 2y = 0 \end{cases}$$

(b) 自明でない 2 つの解を求めよ．

解答

(a) クラメルの規則により解を求める．

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ k & -2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1-k & 0 \\ k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ k & -2 \end{vmatrix}}$$

ここで，いずれも分子が 0 になるから，自明でない解 [つまり 0 でない] が存在するためには，分母もまた 0 となる必要がある．よって，

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ k & -2 \end{vmatrix} = (1-k)(-2) - (1)(k) = k - 2 = 0 \qquad \text{または} \qquad k = 2$$

(b) $k = 2$ のとき，方程式は $-x + y = 0$，$2x - 2y = 0$，すなわち $x = y$ となる．したがって，解の例としては $x = 2,\ y = 2$ や $x = 3,\ y = 3$ などがある．実際には，このような非自明な解は無限に存在する．

極大値と極小値．ラグランジュの未定乗数法

問題 1.52　$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 20$ の極大値と極小値を求めよ．

解答

極大値と極小値となる点は

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0 \quad \text{または} \quad (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

を解くことで定まる．実際に解くと $x = 1, 2, 3$ を得る．そして，$f''(x) = 12x^2 - 48x + 44$

より，$f''(1) = 8 > 0$，$f''(2) = -4 < 0$，$f''(3) = 8 > 0$ となる．したがって，$x = 1$ での $f(1) = 11$ は極小値，$x = 2$ での $f(2) = 12$ は極大値，$x = 3$ での $f(3) = 11$ は極小値となることがわかる．

問題 1.53　以下の図 1-7 について，半径 a の半球に内接することができる直方体の最大の体積を求めよ．

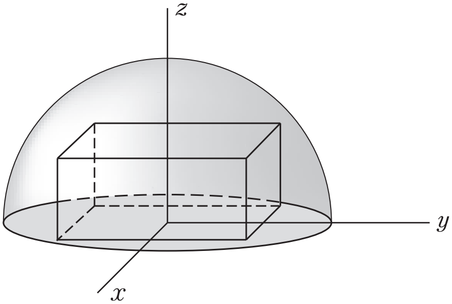

図 1-7

解答

直方体の体積は

$$V = (2x)(2y)(z) = 4xyz$$

であり，半球の表面に関する方程式は $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ または $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ と与えられる．

$V^2 = U = 16x^2y^2z^2 = 16x^2y^2(a^2 - x^2 - y^2)$ が最大のところで，体積は最大になる．これを求めるためには以下の連立方程式を解けば良い．

$$\partial U/\partial x = 2a^2xy^2 - 4x^3y^2 - 2xy^4 = 0. \qquad \partial U/\partial y = 2a^2x^2y - 4x^2y^3 - 2x^4y = 0$$

$x \neq 0$，$y \neq 0$ だからこれらは

$$2x^2 + y^2 = a^2, \qquad x^2 + 2y^2 = a^2$$

となる．ゆえに，$x = y = a/\sqrt{3}$ で，これより $z = a/\sqrt{3}$ となることがわかる．

したがって，体積の最大は $4a^3/3\sqrt{3}$ である．

問題 1.54
(a) 制約条件 $\phi(x, y) = 0$ を課した関数 $f(x, y)$ の極値問題に対するラグランジュの未定乗数法を導出せよ．
(b) 制約条件 $\phi(x, y, z) = 0$ のもとで関数 $f(x, y, z)$ の極値を求める場合，(a) の結果はどのように一般化できるかを示せ．
(c) ラグランジュの未定乗数法を使って 問題 1.53 を解け．

解答

(a) $\phi(x, y) = 0$ を解くことで，y を x の一意な関数，すなわち $y = g(x)$ と表すことができ，連続な導関数 $g'(x)$ を持つとする．すると，

$$f(x, y) = f(x, g(x))$$

の極値を求めるという問題に帰着する．ここで，微積分の知識から，x に関する微分を 0，つまり

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{または} \qquad f_x + f_y g'(x) = 0 \tag{1}$$

と設定することで極値を見つけることができる．また $\phi(x, y) = 0$ に対しても，$\phi(x, g(x)) = 0$ となるから，

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{または} \qquad \phi_x + \phi_y g'(x) = 0 \tag{2}$$

を得る．式 (1) と (2) の間の $g'(x)$ を消去すると，$\phi_y \neq 0$ と仮定して

$$f_x - \frac{f_y}{\phi_y}\phi_x = 0 \tag{3}$$

が得られる．ここで，$\lambda = -f_y/\phi_y$，つまり

$$f_y + \lambda\phi_y = 0 \tag{4}$$

と定義すると，式 (3) は

$$f_x + \lambda\phi_x = 0 \tag{5}$$

となる．したがって，式 (4) と (5) は $h(x, y) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$ を考え，極値において

$$\partial h/\partial x = 0, \qquad \partial h/\partial y = 0 \tag{6}$$

とすることで得られるから，ラグランジュの未定乗数法を導出できた．λ は**ラグランジュ乗数**とよばれる．

(b) この場合，$\phi(x, y, z) = 0$ が $z = g(x, y)$ となるように解くことできるので，

$$f(x, y, z) = f(x, y, g(x, y))$$

と仮定する．このとき，x と y を変数として持つ関数の極値は，x と y に関する偏微分を 0 とすることで，すなわち，

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \text{または} \qquad f_x + f_z g_x = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \text{または} \qquad f_y + f_z g_y = 0 \tag{8}$$

とすることで求められる．また，制約条件に対しても恒等式 $\phi(x, y, g(x, y)) = 0$ を与えるから x と y に関する偏微分を考えることで，

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \text{または} \qquad \phi_x + \phi_z g_x = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \text{または} \qquad \phi_y + \phi_z g_y = 0 \tag{10}$$

を得る．そして式 (7)，(8)，(9)，(10) の中に存在する g_x と g_y を消去すると，$\phi_z \neq 0$ と仮定して

$$f_x - \frac{f_z}{\phi_z}\phi_x = 0, \qquad f_y - \frac{f_z}{\phi_z}\phi_y = 0 \tag{11}$$

が得られる．このとき，$\lambda = -f_z/\phi_z$ または

$$f_z + \lambda\phi_z = 0 \tag{12}$$

によって式 (11) は

$$f_x + \lambda\phi_x = 0, \qquad f_y + \lambda\phi_y = 0 \tag{13}$$

となる．式 (12) と式 (13) は，$h(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda\phi(x, y, z)$ とおいて，その x と y，z に関する（偏）微分を [訳注：式 (12) と式 (13) が成り立つ点で] ゼロとすることで得られるので，ラグランジュの未定乗数法が導出できたと言える．

(c) 制約条件 $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ の下で $4xyz$ の最大値を求める必要がある．これを達成するには

$$h(x, y, z) = 4xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) \tag{14}$$

のような関数を作り，h の x, y, z に関する偏微分が 0 になるようにする．

$$\partial h/\partial x = 4yz + 2\lambda x = 0, \quad \partial h/\partial y = 4xz + 2\lambda y = 0, \quad \partial h/\partial z = 4xy + 2\lambda z = 0 \tag{15}$$

これらの式に x, y, z をそれぞれかけて足し合わせると，

$$12xyz + 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 12xyz + 2\lambda a^2 = 0$$

となり，$\lambda = -6xyz/a^2$ と求まる．したがって，式 (15) に値 λ を代入し，$x^2+y^2+z^2 = a^2$ を使って解くと，

$$x = y = z = a/\sqrt{3}$$

となり，問題 1.53 と同じ結果が得られた．

ライプニッツの積分法則

問題 1.55　$I(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$ としたとき，$\dfrac{dI}{d\alpha}$ を求めよ．

解答

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{d\alpha} &= \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right) dx + \frac{\sin \alpha^3}{\alpha^2}\frac{d\alpha^2}{d\alpha} - \frac{\sin \alpha^2}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\alpha} \\
&= \int_{\alpha}^{\alpha^2} \cos \alpha x\, dx + \frac{2\sin \alpha^3}{\alpha} - \frac{\sin \alpha^2}{\alpha} \\
&= \left[\frac{\sin \alpha x}{\alpha}\right]_{\alpha}^{\alpha^2} + \frac{2\sin \alpha^3}{\alpha} - \frac{\sin \alpha^2}{\alpha} = \frac{3\sin \alpha^3 - 2\sin \alpha^2}{\alpha}
\end{aligned}$$

複素数

問題 1.56　以下の演算を実行せよ．

(a)　$(4-2i)+(-6+5i)$　　(b)　$(-7+3i)-(2-4i)$　　(c)　$(3-2i)(1+3i)$

(d) $\dfrac{-5+5i}{4-3i}$　　(e) $\dfrac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}$　　(f) $|3-4i|\,|4+3i|$

(g) $\left|\dfrac{1}{1+3i} - \dfrac{1}{1-3i}\right|$

解答

(a) $(4-2i)+(-6+5i)=4-2i-6+5i=4-6+(-2+5)i=-2+3i$

(b) $(-7+3i)-(2-4i)=-7+3i-2+4i=-9+7i$

(c)
$$
\begin{aligned}
(3-2i)(1+3i)=3(1+3i)-2i(1+3i)=3+9i-2i-6i^2&=3+9i-2i+6\\
&=9+7i
\end{aligned}
$$

(d)
$$
\begin{aligned}
\frac{-5+5i}{4-3i}&=\frac{-5+5i}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i}=\frac{(-5+5i)(4+3i)}{16-9i^2}=\frac{-20-15i+20i+15i^2}{16+9}\\
&=\frac{-35+5i}{25}=\frac{5(-7+i)}{25}=\frac{-7}{5}+\frac{1}{5}i
\end{aligned}
$$

(e)
$$
\begin{aligned}
\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}&=\frac{i-1+(i^2)(i)+(i^2)^2+(i^2)^2i}{1+i}=\frac{i-1-i+1+i}{1+i}\\
&=\frac{i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{i-i^2}{1-i^2}=\frac{i+1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i
\end{aligned}
$$

(f) $|3-4i|\,|4+3i|=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}\sqrt{(4)^2+(3)^2}=(5)(5)=25$

(g) $\left|\dfrac{1}{1+3i}-\dfrac{1}{1-3i}\right|=\left|\dfrac{1-3i}{1-9i^2}-\dfrac{1+3i}{1-9i^2}\right|=\left|\dfrac{-6i}{10}\right|=\sqrt{(0)^2+(-\frac{6}{10})^2}=\dfrac{3}{5}$

問題 1.57　2 つの複素数 z_1 と z_2 に対して，$|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|$ を証明せよ．

解答

$z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2$ とする．すると，

$$
\begin{aligned}
|z_1z_2|&=|(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)|=|x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)|\\
&=\sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2}=\sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2}\\
&=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}=|x_1+iy_1|\,|x_2+iy_2|\\
&=|z_1|\,|z_2|
\end{aligned}
$$

問題 1.58　$x^3-2x-4=0$ を解け.

解答

可能な有理数の根は $\pm1,\pm2,\pm4$ である．試しに代入してみると $x=2$ が根であることがわかる．ゆえに方程式を $(x-2)(x^2+2x+2)=0$ とかくことができる．**二次方程式** $ax^2+bx+c=0$ に対する解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ であるから，$a=1,\ b=2,\ c=2$ に対しては $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{-2\pm2i}{2}=-1\pm i$ となる

以上より方程式の解は $2, -1+i, -1-i$ である．

複素数の極形式

問題 1.59　以下を極形式で表せ．

$(a)\ 3+3i,\qquad (b)\ -1+\sqrt{3}i,\qquad (c)\ -1,\qquad (d)\ -2-2\sqrt{3}i$

解答

(a) 偏角は $\phi = 45^\circ = \dfrac{\pi}{4}\,[\mathrm{rad}]$．絶対値は $\rho = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$．したがって，

$$3+3i = \rho(\cos\phi + i\sin\phi) = 3\sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4) = 3\sqrt{2}\operatorname{cis}\pi/4 = 3\sqrt{2}e^{\pi i/4}.$$

(b) 偏角は $\phi = 120^\circ = 2\pi/3\,[\mathrm{rad}]$．絶対値は $\rho = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$．したがって，

$$-1+\sqrt{3}i = 2(\cos 2\pi/3 + i\sin 2\pi/3) = 2\operatorname{cis}2\pi/3 = 2e^{2\pi i/3}$$

(c) 偏角は $\phi = 180^\circ = \pi\,[\mathrm{rad}]$．絶対値は $\rho = \sqrt{(-1)^2+(0)^2} = 1$．したがって，

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = \operatorname{cis}\pi = e^{\pi i}$$

(d) 偏角は $\phi = 240^\circ = 4\pi/3\,[\mathrm{rad}]$．絶対値は $\rho = \sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2} = 4$．したがって，

$$-2-2\sqrt{3} = 4(\cos 4\pi/3 + i\sin 4\pi/3) = 4\operatorname{cis}4\pi/3 = 4e^{4\pi i/3}$$

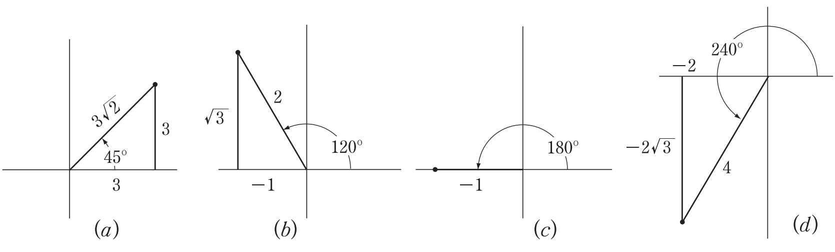

図 1-8

問題 1.60　以下を求めよ．

$(a)\ (-1+\sqrt{3}i)^{10},\qquad (b)\ (-1+i)^{1/3}$

解答

(a) 問題 1.59(b) とド・モアブルの定理より,

$$\begin{aligned}(-1+\sqrt{3}i)^{10} &= [2(\cos 2\pi/3 + i\sin 2\pi/3)]^{10} = 2^{10}(\cos 20\pi/3 + i\sin 20\pi/3)\\ &= 1024\,[\cos(2\pi/3+6\pi) + i\sin(2\pi/3+6\pi)] = 1024(\cos 2\pi/3 + i\sin 2\pi/3)\\ &= 1024(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}i) = -512+512\sqrt{3}i\end{aligned}$$

(b) $-1+i=\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ) = \sqrt{2}\,[\cos(135^\circ + k\cdot 360^\circ) + i\sin(135^\circ + k\cdot 360^\circ)]$
したがって,

$$(-1+i)^{1/3} = (\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{135^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}\right) + i\sin\left(\frac{135^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}\right)\right].$$

$k=0,\,1,\,2$ に対する結果は,

$$\begin{aligned}&\sqrt[6]{2}\,(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)\,,\\ &\sqrt[6]{2}\,(\cos 165^\circ + i\sin 165^\circ)\,,\\ &\sqrt[6]{2}\,(\cos 285^\circ + i\sin 285^\circ)\,.\end{aligned}$$

$k=3,\,4,\,5,\,6,\,7,\dots$ に対する結果は上式の繰り返しである. これらの複素数の根は, 図 1-9 で示すように複素平面内の円上の点 P_1, P_2, P_3 として幾何学的に表される.

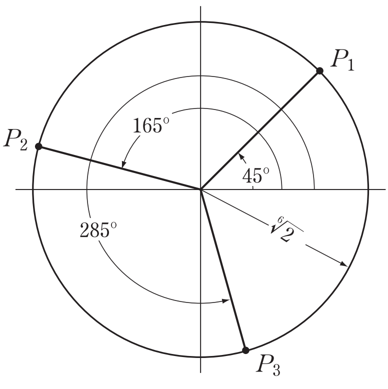

図 1-9

問題 1.61　p.12 の e^x のテイラー級数が x の複素数値でも成り立つと仮定することで, **オイラーの公式** $e^{i\phi}=\cos\phi + i\sin\phi$ を導出せよ.

解答

$x = i\phi$ のとき，以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
e^{i\phi} &= 1 + i\phi + \frac{(i\phi)^2}{2!} + \frac{(i\phi)^3}{3!} + \frac{(i\phi)^4}{4!} + \frac{(i\phi)^5}{5!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos\phi + i\sin\phi
\end{aligned}
$$

同様に $e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi$ となることもわかる．